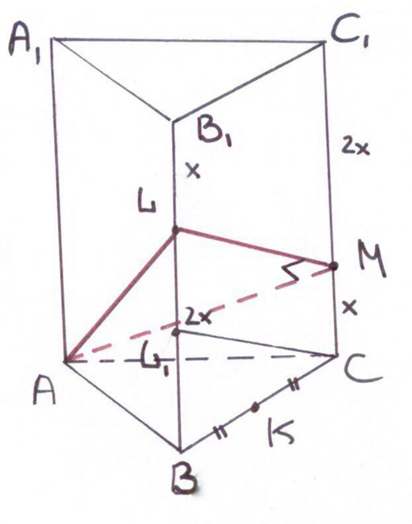
Решения к Административной контрольной работе "Расстояния и углы"
Подготовлено Соломиным В.Н

28 апреля 2018 г.

а) Найдите b

Решение:



1) Для решение задачи рассмотрим $\triangle$ABL. Нетрудно заметить, что он прямоугольный (Прямая призма: $\angle ABL = 90°$)

2) Тогда сразу же воспользуемся Теоремой Пифагора, из которой следует, что
$AB^2 + BL^2 = AL^2$
Т.е. из условия (AB = 6 и BL = $\frac{2}{3}$ BB_1) получим, что $36 + \frac{4}{9}b^2 = AL^2$

3)Также ясно, что $\triangle$ABL - р/б в силу того, что AM = ML (Если сделать $\parallel$ перенос, при котором M перейдет в C, то получившийся $\triangle$ $L_1CB = \triangle$ AMC)

4)Аналогично Теорема Пифагора для $\triangle$AMC
$36 + \frac{1}{9}b^2 = AM^2$

5)Учитывая п.3, получим из $\triangle$AML по Теореме Пифагора.

$ML^2 + AM^2 = AL^2$ т.е. $2AB^2 = AL^2$
Стоит сказать задумчивому читателю, что нетрудно заметить прямоугольность (По условию $\angle AML = 90°$)

Таким образом, из предыдущих пунктов :
$36 + \frac{4}{9}b^2 = 72 + \frac{2}{9}b^2$
Откуда ответ: b = $9\sqrt{2}$

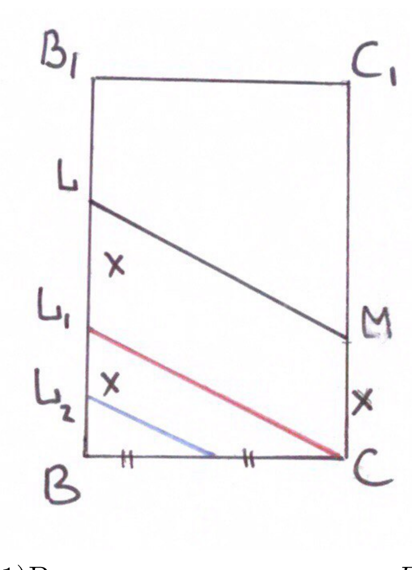
b) Найдите угол между прямой LM и плоскостью ABC

Решение:

Способ 1

Ответ очевиден: 90° .
Легко заметить, что АК$\perp$ BB_1C, хотя бы в силу того, что
АК$\perp$ BC (как высота р/с $\triangle$-ка)
АК$\perp$ BB_1(т.к. призма правильная)
Тогда, т.к. $BC \times BB_1$, выходим на признак $\perp$ прямой и плоскости.
Однако, если этот способ не угадывается, то отчаиваться не стоит, обратимся к способу 2.

Способ 2



1)Вынесем прямоугольник BB_1C_1C (Напоминаю,что призма прямая) и сделаем д/п : LL_1 = x
Тогда легко заметить, что LL_1CM-$\|$-м (LL_1 = MC = x; LL_1 $\|$ MC)

Ну, а известно, что у $\|$-ма противоположные стороны равны, тогда $L_1C = LM = \sqrt{\frac{1}{9}*b^2*9+36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ (Это из Теоремы Пифагора для $\triangle$ BL_1C) , т.е. , подставляя b получим нужное)

2) Снова сделаем д/п KL_2C - ср. линия $\triangle$-ка BL_1C, тогда по св-ву:
$L_2K = \frac{1}{2}L_1C$= $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

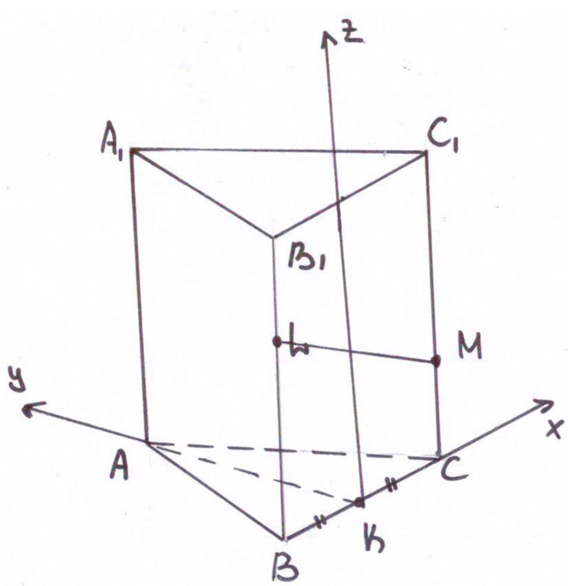
3)Рассмотрим $\triangle$-к AL_2K : ВК = 3; $L_2B = \frac{1}{2}L_1B$ (как в п.2) $= \frac{1}{6}b = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
Тогда AL_2 по Теореме Пифагора из $\triangle$-ка AL_2B: $AL_2 = \sqrt{BL_2^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{9*4}{2}+36} = \frac{9}{\sqrt{2}}$

4)Выйдем на определение $\angle$AK;LM (в силу $L_2K \parallel LM$) $= \angle L_2KA$

$\cos\angle L_2KA = \frac{KL_2^2+AK^2-L_2A^2}{2ABL_2A} = \frac{\frac{9*6}{4}+27-\frac{81}{2}}{2\frac{3*\sqrt{6}}{2}*3\sqrt{3}} = 0$ Тогда незамедлительно $\angle L_2KA = 90°$

Ясно, что $AK = \frac{\sqrt{3}}{2} * AB$ (св-во р/с $\triangle$-ка) (L_2K п.2 , L_2A п.3)

Способ 3



Введем ситстему координат как показано на рисунке с соответствующими осями.

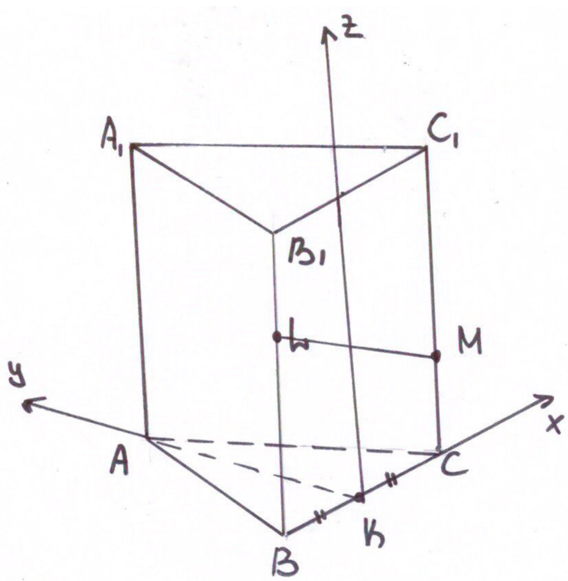
Тогда распишем все нужные координаты L(-3;0;6$\sqrt{2}$) M(3;0;3$\sqrt{2}$ A(0;3$\sqrt{3}$;0) Думаю, что все они очевидны, опираясь на способ 2.
Тогда
$\overrightarrow{LM}(6; 0; -3\sqrt{2})$
$\overrightarrow{KA}(0; 3\sqrt{3}; 0)$

$\overrightarrow{KA} * \overrightarrow{LM}$ =6*0+0*3$\sqrt{3} - 3\sqrt{2} * 0 = 0$ т.е. $\overrightarrow{LM} \perp \overrightarrow{KA}$

значит $\angle LM; KA = 90°$

c) Найдите угол межу прямой LM и плоскостью ABC

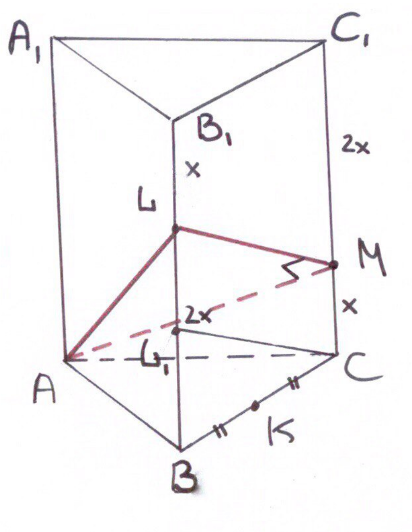
Способ 1



Воспользуемся системой координат как в пункте b)
Заметим, что нормаль $\overrightarrow{n}$ имеет координаты (0;0;1) (часть BB_1)
Тогда $|\cos \overrightarrow{n}; \overrightarrow{LM}| = |\frac{\overrightarrow{n} * \overrightarrow{LM}}{|\overrightarrow{n}| * |\overrightarrow{LM}|}|$
Напомню, что LM знаем из п.а., $\overrightarrow{LM}$ из предыдущего п.с.
Тогда $|\cos \overrightarrow{n}; \overrightarrow{LM}| = |\frac{-3\sqrt{2}}{1 * \sqrt{54}}| = |\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Не забываем, что $\angle LM; ABC = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$

Способ 2



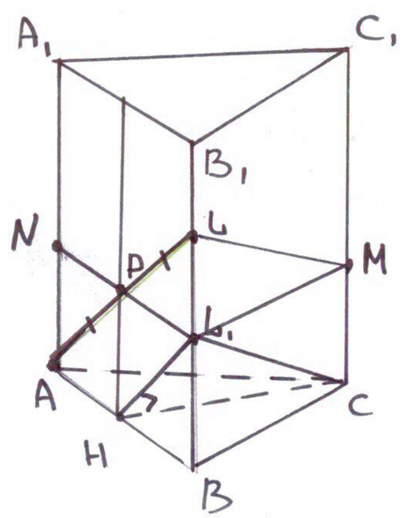
Действуя по классическому сценарию, получим, что BC - это проекция LM на ABC. (Ну это очевидно, потому что призма прямая)
Тогда $\angle L_1CB$-искомый, потому что $CL_1 \parallel LM$ (выходим на определение)
Не забываем, что все нужное посчитано в п.а. , тогда $\sin\angle L_1CB = \frac{L_1B}{L_1C} = \frac{\frac{1}{3}*9\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

В принципе можно решать через tg Дальнейшие рассуждения схожи, их оговаривать отдельно не будем.

d) Найдите угол межу прямой LM и плоскостью A_1BA

Способ 1



1)Для решения этой задачи воспользуемся идеей подмены угла:
Т.к. $CL_1 \parallel LM$ (из пункта с)) , то $\angle LM; ABA_1 = \angle L_1C; ABA_1$

2)Сделаем д/п: $CH \perp LM$, тогда из рассуждений способа 1 пункта b) следует, что $CH \perp AA_1B_1$, т.е. L_1H - это проекция CL_1 на AA_1B_1
Таким образом, легко заметить, что $\angle CL_1H$ - искомый

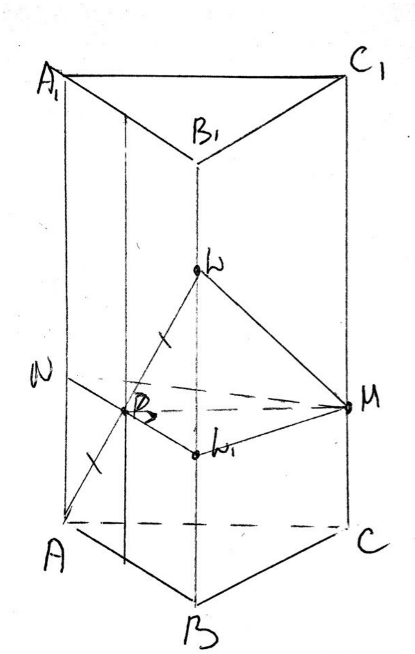
3)Найдем этот угол по Th cos :cos$\angle CL_1H = \frac{CL_1^2 + L_1H^2 - HC^2}{2CL_1 * L_1H} = \frac{54+27-27}{2*3\sqrt{6}*3\sqrt{3}} = \frac{54}{9*6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Стоит заметить, что CL_1 была посчитана в п.b способ 2 и HC там же.

Подсчет L_1H: Рассмотрим $\triangle BLA$, в котором $AH = HB$; $BL_1 = L_1L$ по построению (напомню, что $\triangle CBA$ - р/с, а HC - медиана по построению), т.е (по признаку) L_1H - ср.линия $\triangle BLA$, т.е. $L_1H = \frac{1}{2}AL = 3\sqrt{3}$

Таким образом, $\angle LM; ABA_1 = 45°$

Однако есть более простой способ

Способ 2

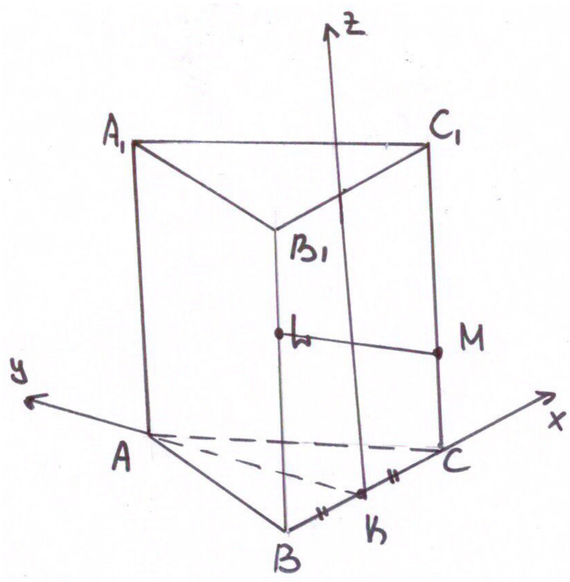


1)Рассмотрим медиану MP р/б $\triangle ALM$ (равнобедренность оговаривается в п.а), которая также является высотой
Тогда $MP \perp L_1P$ (где L_1P - ср.линия $\triangle ALB$, т.к. P - середина AL по построению), т.к. $ML = MN$ (в силу д/п N : NA = x) , тогда $\triangle NL_1M$ - р/б, в котором MP - медиана из очевидных соображений, значит она является высотой

2)Таким образом, $MP \perp AL$; $MP \perp PL_1$ и $PL_1 \times AL$, т.е. по признаку $MP \perp AA_1B_1$
Значит PL - проекция ML и $\angle PLM = 45°$ (Стоит напомнить, что из п.а. $\triangle MNL$ - р/б и прямоугольный)

Не стоит забывать и про метод координат

Способ 3



Используя этод способ, можно также быстро подобраться к итоговому результату. Будем действовать аналогично п.с.

Опишем кратко важные величины : нормаль $\vec{n}_1$ к AA_1B_1, ясно ,что $\vec{n}_1 = \overrightarrow{CH}$

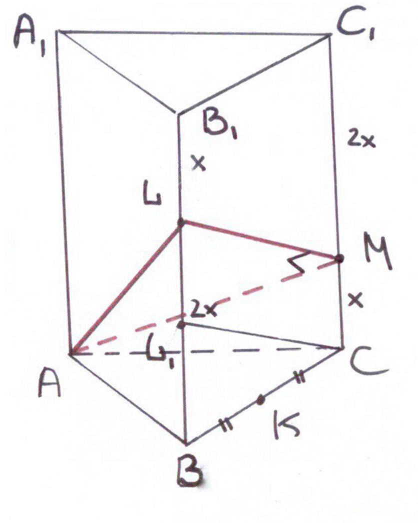
H($-\frac{3}{2}$;$\frac{3\sqrt{3}}{2}$;0) , C(3;0;0), тогда $\overrightarrow{CH}(-\frac{9}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$

Таким образом $|\cos \overrightarrow{LM}; \overrightarrow{CH}| = |\frac{\overrightarrow{LM} * \overrightarrow{CH}}{|\overrightarrow{LM}| * |\overrightarrow{CH}|}| = |\frac{6*(-\frac{9}{2})}{\sqrt{54}*\sqrt{27}}| = |\frac{27}{\sqrt{27}*\sqrt{27}*\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Все величины были посчитаны в предыдущих способах.

Таким образом получим ответ: $\angle 45°$

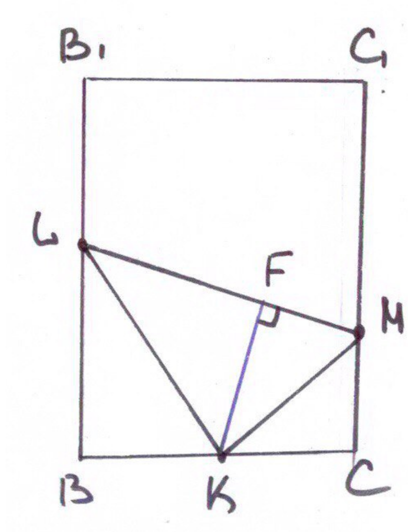
e) Найдите расстояние между прямыми AK и LM



1)Т.к. поиск общего перпендикуляра здесь довольно затруднителен, то спроецируем прямые AK и LM на плоскость BB_1C_1

Тогда AK перейдет в K, т.к. $AK \perp BB_1C_1$ (аналогичные рассуждения п.b способ 1), а LM перейдет сама в себя

Таким образом (по свойству) искомое расстояние есть расстояние от K до прямой LM



2)Пусть $KF \perp LM$ тоогда $S_{KLM} = S_{BLM} - S_{KLB} - S_{KCM} = \frac{LB+MC}{2}BC - \frac{LB*BK}{2} - \frac{KC*MC}{2} = \frac{1}{2}(BCBB_1 - BK(LB+MC))$ (площадь трапеции и треугольников) (интересно вынести за скобки и не подставлять)

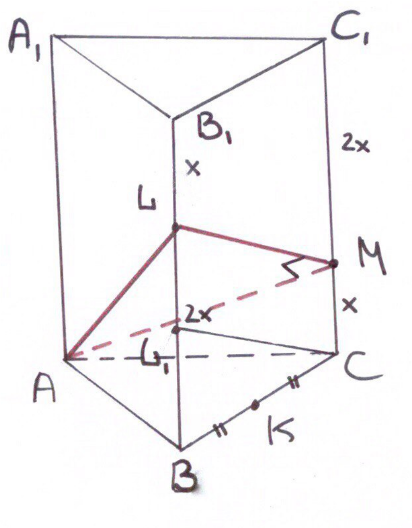
Тогда, т.к. $LB + MC = BB_1$; BK=KC (условие), получим : $\frac{1}{2}(BCBB_1 - BK(LB+MC)) = \frac{1}{2}(BCBB_1 - BKBB_1) = \frac{1}{2}(BB_1(BC - BK)) = \frac{1}{2}(BB_1BK) = \frac{1}{2}9\sqrt{2} * 3 = \frac{27\sqrt{2}}{2}$

Тогда, т.к. $S = \frac{ha}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2}$, то $h = KF = 3\sqrt{3}$

Ответ: $3\sqrt{3}$

f) Найдите угол между плоскостями ALM и ABC

Способ 1



1)Казалось бы, самый простой способ нахождения угла между этими плоскостями - это обращение к формуле: $S_0 * \cos\alpha = S$, где α - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания

Таким образом, в нашей терминологии - это $S_{ALM} * \cos\angle ALM; ABC = S_{ABC}$

$S_{ALM} = \frac{1}{2}\sqrt{54}\sqrt{54} = 27$ (AM и LM посчитаны ранее в п.b) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36\frac{3}{4} = 9\sqrt{3}$

Тогда $\cos\angle ALM; ABC = \frac{9\sqrt{3}}{27} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Но если обратиться к п.d, то можно заметить способ интереснее

Способ 2

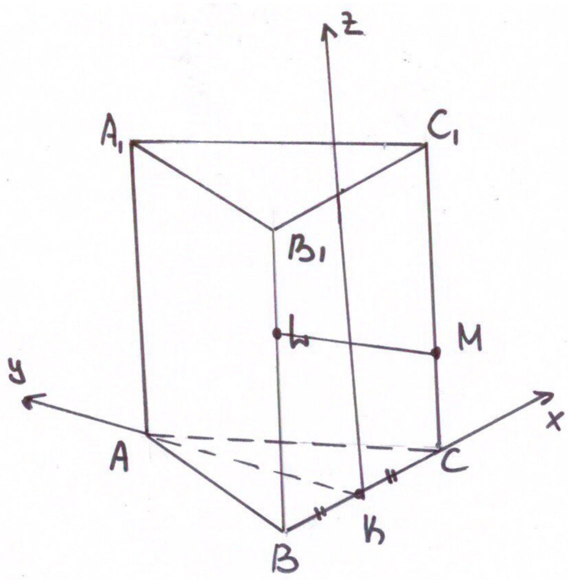
1)Можно заметить, что $AL \parallel HL_1$ и $ML \parallel CL_1$, тогда по признаку $\parallel$ плоскостей, получим, что $ALM \parallel HL_1C$ и мы снова можем подменить угол : $\angle ALM; ABC = \angle HL_1C; ABC$

2)$HL_1C \cap ABC = HC$, также $HL_1 \perp HC$ (ранее было док-но, что $\triangle HL_1C$ - прямоугольный), также $HB \perp HC$, т.е. по определению $\angle L_1HB$ - линейный при ДУ L_1HCB

3)$\operatorname{tg} L_1HB = \frac{L_1B}{HB} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

Таким образом ответ: $\arctan\sqrt{2}$

Способ 3



Также можно решить, используя метод координат

1)Введем систему координат, как показано на рисунке. Нашей задачей будет поиск угла между нормалями к данным плоскостям.

2)В силу того, что ABC совпадает с XOY, то $\vec{n}_1(0;0;1)$ Все данные берем из пунктов ранее: $A(0;3\sqrt{3};0); L(-3;0;6\sqrt{2}; M(3;0;3\sqrt{2})$

3)Уравнение плоскости $ALM : ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} \text{L : -3a+6}\sqrt{2}c+d=0 \\ \text{M : -3a+6}\sqrt{2}c+d=0 \\ \text{A : }3\sqrt{3}b+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{-}3\sqrt{3}=d \\ \text{-}9\sqrt{2}c=2d \\ 3\sqrt{3}b=d \end{cases}$$

Уравнение плоскости , сразу сокрощая на d: $\frac{x}{9}+\frac{y}{3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{9}-1=0}$

т.е. $\vec{n}_1(\frac{1}{9};\frac{1}{3\sqrt{3};\frac{\sqrt{2}}{9}}$

4)Полностью аналогичные рассуждения для AKL: $K(0;0;0); L(-3;0;6\sqrt{2}$
$ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases} \text{L : -3a+6}\sqrt{2}c+d=0 \\ \text{M : 3a+3}\sqrt{2}c+d=0 \\ \text{A : }3\sqrt{3}b+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{-9a = d} \\ \text{-}9\sqrt{2}c=2d \\ 3\sqrt{3}b=d \end{cases}$$

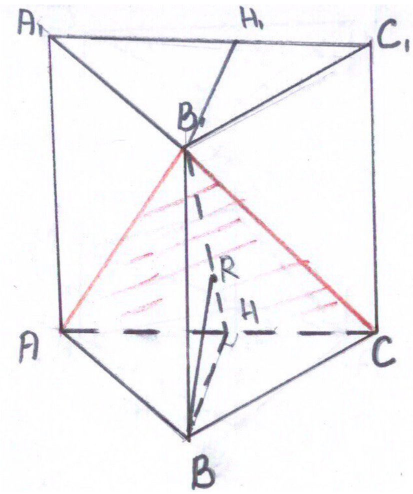
Уравнение плоскости , сразу сокрощая на d: $\frac{x}{9}+\frac{y}{3\sqrt{3}}+\frac{z\sqrt{2}}{9}-1=0$

т.е. $\vec{n}_1(\frac{1}{9};\frac{1}{3\sqrt{3}};\frac{\sqrt{2}}{9})$

5)$|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)| = |\frac{\vec{n}_1 * \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| * |\vec{n}_2|}| = \frac{\frac{\sqrt{2}}{9}}{\frac{1}{81}+\frac{\sqrt{1}}{27}+\frac{\sqrt{2}}{81}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Т.е. $\cos\angle(AML; AKL) = (\pi - \cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

g) Найдите расстояние от B до AB_1C

Способ 1



1)Ясно, что призма симметрична относительно плоскости BB_1H_1, где BH, B_1H_1 - высоты оснований
Поэтому $\perp$ из B на плоскость AB_1C находится в BB_1H_1

2)Сделаем д/п: $BR \perp HB_1$, т.к. $AC \perp BB_1H_1$, а $BR \subset BB_1H_1$, то $BR \perp AC$
Тогда $BR \perp$-на двум пересекающимся прямым в плоскости AB_2C и значит $\perp$ самой плоскости.

3)Найдем высоту $\triangle BHB_1$ - прямоугольного:
$BR = \frac{BB_1BH}{B_1H} = \frac{9\sqrt{2}3\sqrt{3}}{3\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = 3\sqrt{21}$
Ясно, что $B_1H^2 = BH^2 + BB_1$ (по Теореме Пифагора) , все остальные величины высчитывались ранее.
Ответ: $3\sqrt{21}$

,

Способ 2

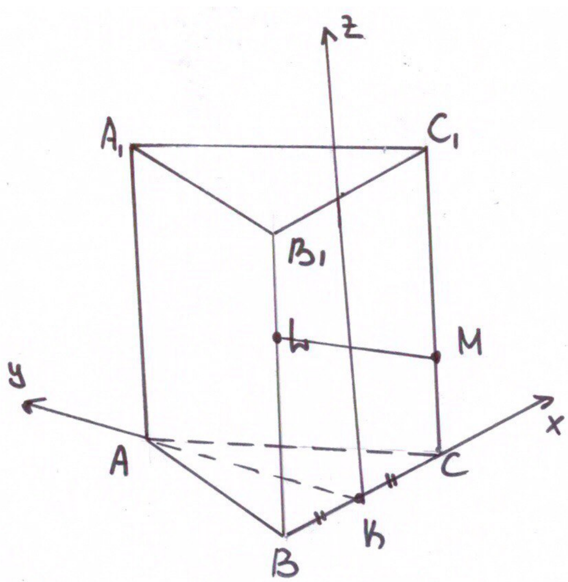
1) Рассмотрим пирамиду B_1ABC с вершиной B_1. Ее объем равен $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}BB_1$ (BB_1 - высота пирамиды)

2)С другой стороны можно завалить пирамиду на основание AB_1C. Тогда B будет вершиной пирамиды и $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}S_{AB_1C}h$, где h - искомое расстояние.

3)Тогда воспользуемся законом сохранения объема: V=const, те $h = \frac{S_{ABC}BB_1}{S_{AB_1C}} = \frac{9\sqrt{2}*9\sqrt{3}}{\frac{1}{2}*6*3\sqrt{21}} = 3\sqrt{21}$
Здесь все величины, кроме S_{AB_1C}, посчитаны ранее. Однако $S_{AB_1C}\frac{1}{2}HB_1AC$, тут уже все известно.

И ,наконец, ничего не мешает применить метод координат

Способ 3



Мы можем воспользоваться формулой расстояния от точки до плоскости в пространстве:
1)Для этого нам нужно найти уравнение плоскости
Т.к. мы неоднократно вводили систему координат ранее, то опустим поиск координат точек:
$A(0; 3\sqrt{2}; 0)$; $C(3; 0; 0)$;B_1(-3;0;$9\sqrt{2}$)
Таким образом, составим уравнение плоскости AB_1C, исходя из общего уравнения $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}b + d = 0 \\ 3a+d = 0 \\ -3c+9\sqrt{2}c + d = 0 \end{cases}$$

Откуда незамедлительно:

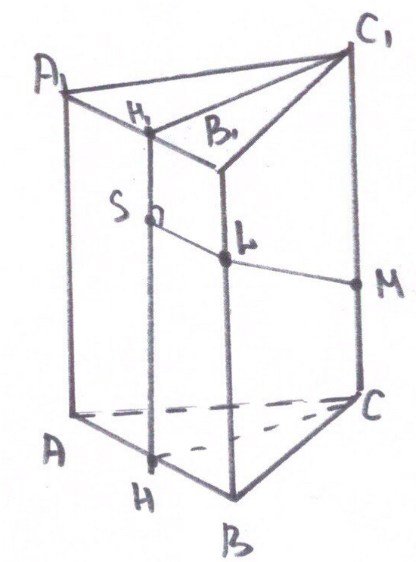
$$\begin{cases} \text{-}3\sqrt{3}b = d \\ \text{-3a =d} \\ \text{-}9\sqrt{2}c = 2d \end{cases}$$

Т.е. уравнение плоскости: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}z}{9} - 1 = 0$ (Подставили и поделили на d)

Тогда, исходя из фрмулы $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2c^2}}$ и B(-3;0;0), получим $\frac{|-1-1|}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{14}{81}}} = 3\sqrt{21}$

h) Найдите расстояние от AB до LM

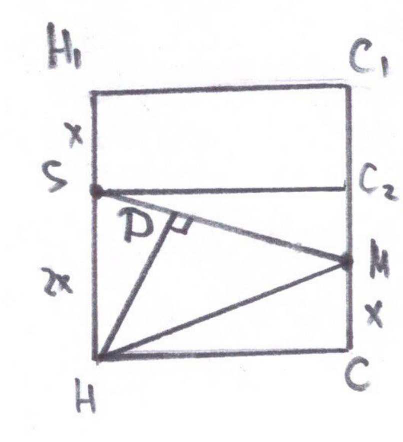
Способ 1



1) Поиск перпендикуляра также затруднителен как и в п.е.
Тогда попробуем найти плоскость, на которую одна из прямых проецируется в точку, а другая перейдет в прямую.
Конечно же плоскость $\perp$-ю прямой AB подобрать легче. Это плоскость CHH_1, где H, H_1 - все также высоты оснований. Прямая AB перейдет в H , а ML в MS, где $LS \parallel BH$, а значит $LS \perp HH_1C_1$ ($HB \perp HH_1C_1$ по свойству призмы).
Таким образом, MC - проеция BL на плоскость HH_1C_1

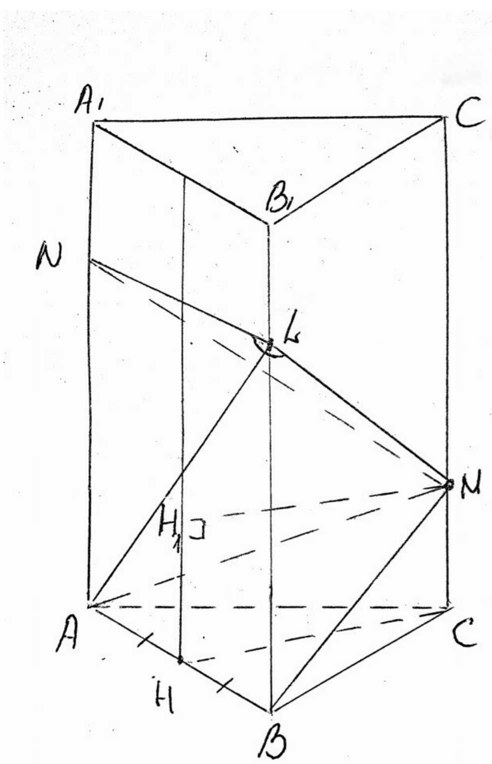
2)Из п.1 следует, что $\rho(AB; LM) = \rho(H; MS)$

Сделаем выносной рисунок:



$S_{SMH} = \frac{1}{2}HD * SM = \frac{1}{2}CH * SH$;
$SM = \sqrt{HC^2 + \frac{1}{9}b^2} = \sqrt{27+18} = 3\sqrt{5}$ (Теорема Пифагора для $\triangle$-ка SM_1M
$HD = \frac{CHSH}{SM} = \frac{\frac{2}{3}9\sqrt{2}*3\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{6}}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{30}}{5}$ (Легко заметить ,что $SH = M_1C = \frac{2}{3}b$ (смотри п.2 выше). Остальные величины посчитаны ранее)
Ответ: $\frac{6\sqrt{30}}{5}$

Способ 2



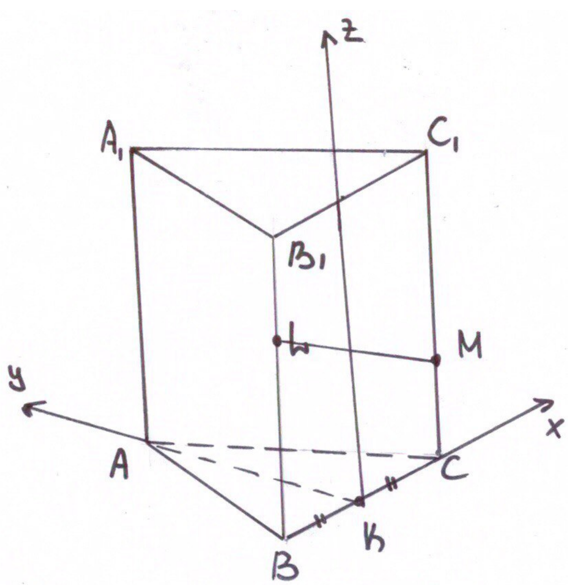
1)Также можно решить эту задачу, если вспомнить замечательную формулу для объема тетраэдра: $V = \frac{1}{6} * ab * \rho(a;b)\sin(a;b)$

2)Здесь все довольно просто: будем искать пошагово нужные нам величины.
Для начала найдем объем тетраэдра V_{MALB}: т.к. из пунктов ранее $CH \perp ABA_1$, тогда д/п из M $MH_1 \parallel CH$ - это высота h тетраэдра, $CH = 3\sqrt{3}$ (посчитана ранее).
$S_{ALB} = \frac{1}{2}LB * AB = 6 * \frac{2}{3}b = 6 * \frac{2}{3} * 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$
Тогда $V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} * 18\sqrt{2} * 3\sqrt{3} = 18\sqrt{6}$

Теперь найдем $\sin(a;b)$: Для этого сделаем $\parallel$-ный перенос AB в точку L, т.е. д/п $LN \parallel AB$, тогда по свойству $\angle LM; AB = \angle LM; LN$
Рассмотрим $\triangle$-к NLM - р/б: $NM = LM$ (рассуждения такие же как в п.а для доказательства р/б-ти)
По Th cos : $\cos\angle NLM = \frac{LN^2+LM^2-NM^2}{2NLML} = \frac{36+54-54}{2*\sqrt{54}*6} = \frac{3}{\sqrt{54}}$ (Стоит сказать, что все вел-ны посчитаны ранее, кроме NM, но в силу р/б-ти $NM = ML$
Тогда $\sin\angle NLM = \sqrt{1-\cos\angle NLM^2} = \sqrt{1-\frac{9}{54}} = \sqrt{\frac{45}{54}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{54}}$

3)Из рассуждений выше следует, что $\rho(a;b) = \frac{6V}{ab\sin(a;b)} = \frac{6*18\sqrt{6}}{6*\sqrt{54}*\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{54}}} = 6\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{30}}{5}$

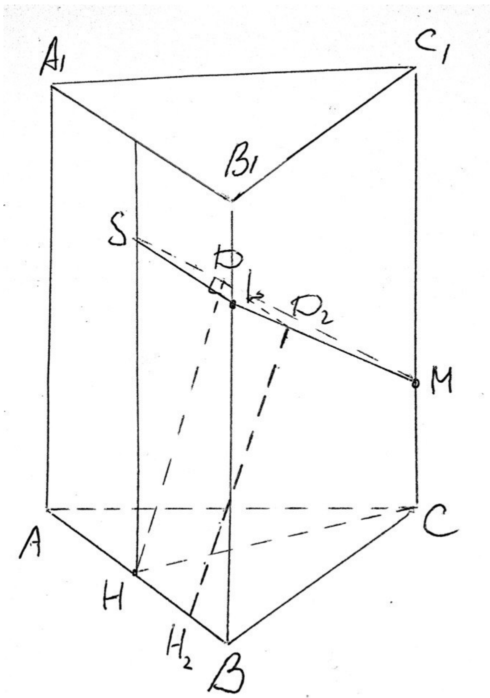
Способ 3



Ну и нельзя забывать про МК:

1)Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда введем векторы, лежащие на данных прямых и вектор, перпендикулярный им, концы которого лежать на двух исходных. Тогда найдем координаты:
$C(0;0;0)$

Способ 4



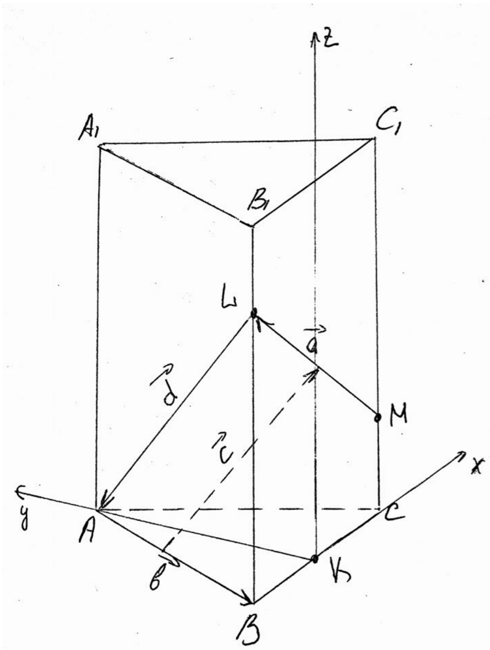
Построим общий $\perp$ и вычислим его:
1)Сделаем д/п D: $HD \perp SM$ (все обозначения из прошлых способов), тогда если провести $DD_1 \parallel SL \parallel HB$ и построить $D_1H_2 \parallel DH$, то получим общий $\perp$, т.к. $DH \perp SLM$ ($DH \perp SM, DH \perp SL$, т.к. $DH \perp AB$, а $SL \parallel AB, SM \times SL$, т.е. выходим на признак)
Ну а то, что $DH \perp AB$ сомнений не вызывает.

2)Посчитать этот $\perp$ легко из $\triangle$-ка SHM (ясно, что $DH = D_1H_2$, в котором известно все, кроме HM, которую легко посчитать из прямоугольного $\triangle$-ка HMC: по Th Пифагора $HM = \sqrt{HC^2 + CM^2} = \sqrt{27 + 18} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Тогда по Теореме cos найдем $\angle SHM = \frac{72+45-45}{2*\frac{2}{3}*9\sqrt{2}*3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$
Тогда $\sin \angle SHM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
В таком случае $S_{HSM} = \frac{1}{2}SHMH * \sin \angle SHM = \frac{1}{2} * 6\sqrt{2} * 3\sqrt{5} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 9\sqrt{6}$

Также можно посчитать площадь через $h = DH$, т.е. $S = \frac{1}{2}DH * SM = 9\sqrt{6}$, отсюда $DH = \frac{6\sqrt{30}}{5}$

Но без предыдущего решения трудно вообще осознать, где же находится общий $\perp$. Есть ли более универсальный способ?

Способ 5



Конечно есть. Воспользуемся простыми соображениями. Есть 2 вектора, лежащих на скрещивающихся прямых. Нам необходимо найти кооэфициенты вектора $\perp$-го им обоим, концы которого содержат данные векторы. Таким образом, как только мы найдем его коэфициенты, то сумеем найти и его длину. Это и будет искомое расстояние между скрещивающимися прямыми.

Тогда должны быть выполнены следущие условия.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 x_0 + y_1 y_0 + z_1 z_0 = 0(1) \\ \mathrm{x}_2 x_0 + y_2 y_0 + z_2 z_0 = 0(2) \end{cases}$$

Это условия $\perp$.
Но как быть? У нас два уравнения и 3 неизвестных. Поступим просто: введем еще один вектор $\vec{d}$:
$\vec{c} = x\vec{a} + \vec{d} + y\vec{b}$, тогда уравнения в системе станут такими:
$(x(\vec{a}) + (\vec{d}) + y(\vec{b})) * (\vec{a}) = 0(1)$
$(x(\vec{a}) + (\vec{d}) + y(\vec{b})) * (\vec{b}) = 0(2)$

Приведя все подобные члены, получим выражения со скалярными произведениями. Думаю, не стоит труда их посчитать.
$M(3; 0; 3\sqrt{2}), L(-3; 0; 6\sqrt{2}), B(-3; 0; 0), A(0; 3\sqrt{3}; 0)$
Тогда $\overrightarrow{ML}(-6; 0; 3\sqrt{2}) = \vec{a}; \overrightarrow{AB}(-3; -3\sqrt{3}; 0) = \vec{b}; \overrightarrow{LA}(3; 3\sqrt{3}; -6\sqrt{2}) = \vec{d}$
Отельно посчитаем их скалярные произведения:

$\vec{a} * \vec{b} = 36 + 0 + 18 = 54$
$\vec{a} * \vec{a} = 9 + 27 + 0 = 36$

$\vec{b} * \vec{b} = 9 + 27 + 72 = 108$
$\vec{d} * \vec{d} = 18 + 0 + 0 = 18$
$\vec{a} * \vec{d} = -9 - 27 + 0 = -36$
$\vec{b} * \vec{d} = -18 + 0 - 36 = -54$

Тогда получим x и y (подставляя и приведя подобные члены)

i) Найдите угол между плоскостями AML и AKL

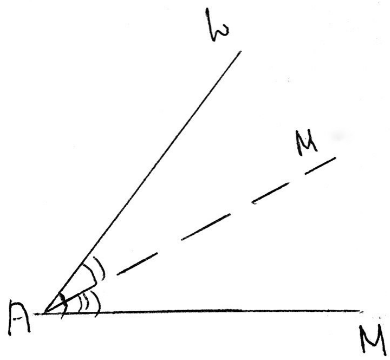
Способ 1

1)В начале поймем, какой вид у $\triangle$-ка ALK:
$LK = \sqrt{\frac{4}{9} * 9^2 * 2 + 9} = 9$
$Al = \sqrt{\frac{4}{9} * 9^2 * 2 + 36} = 6\sqrt{3}$
$AK = 3\sqrt{3}$

2)Легко заметить, что $AK^2 + LK^2 = AL^2$, т.е. по обр Th Пифагора $\triangle - ALK$ - прямоугольный, где $\angle K = 90°$
Кстати, это можно было и сразу заметить: $AK \perp BB_1C_1; LK \subset BB_1C_1$
$AML \cap AKL = AL$ и если $\perp$ из точки M на сторону AL проходит ч/з ее середину ($\triangle AKM$ -р/б), то для вершины K $\triangle - ALK$ это не так ($\triangle - ALK$ - не р/б)
Поэтому построить линейный угол ДУ KALM весьма затруднительно, в смысле поиска его величины (Построить-то его можно).
3)Для того, чтобы построить этот угол, нужно выпустить 2 $\perp$ из любой точки AL, так, чтобы они содержались в плоскостях ALK и ALM.

Способ 2

1)В таких затруднительных ситуациях лучше всего выручает Th cos для ТУ:



$\cos\angle MAK = \cos\angle KAL * \cos\angle MAL + \sin\angle KAL * \sin\angle MAL * \cos\angle KALM$

2)Заметим, что $\triangle$-к AMK - р/б по тем же соображениям, что и $\triangle$ AKL
$\cos\angle MAK = \frac{AK}{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

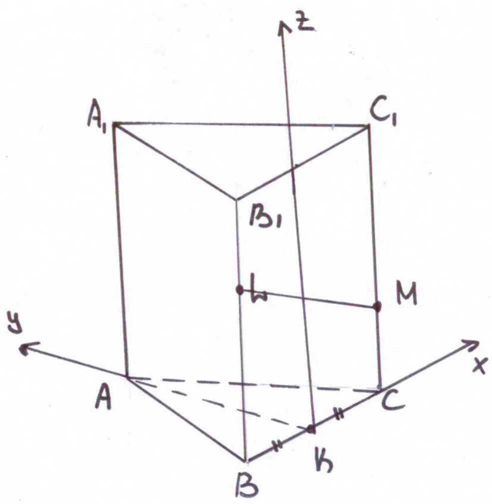
$\cos\angle KAL = \frac{AK}{AL} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}=\frac{1}{2}}$

$\cos\angle MAL = AMAL = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Также посчитать sin не составляет труда.

3)Имеем: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \cos\angle KALM$, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} * \cos\angle KALM$, т.е.
$\cos\angle KALM = \angle AML; AKL = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Способ 3



1)Обратимся к МК. Сведем задачу о нахождении угла между плоскостями к задаче о плоских углах между нормалями к этим плоскостям.

2)Все данные берем из пунктов ранее: $L(-3;0;6\sqrt{2})$; $M(3;0;3\sqrt{2}$; $A(0;3\sqrt{3};0)$
3)Уравнение плоскости $ALM : sc + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} \text{L : -3a+}6\sqrt{2}c + d = 0 \\ \text{M : 3a+}3\sqrt{2}c + d = 0 \\ \text{A : }3\sqrt{3}b + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{-9a = d} \\ \text{-}9\sqrt{2}c = 2d \\ 3\sqrt{3}b = d \end{cases}$$

Уравнение плоскости , сразу сокращая на d: $\frac{x}{9} + \frac{y}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{9} - 1 = 0$
т.е. $\vec{n}_1(\frac{1}{9}; \frac{1}{3\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}}{9}$

4)Полностью аналогичные рассуждения для AKL: $K(0;0;0)$; $L(-3;0;6\sqrt{2}$
$ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} \text{L : -3a+}6\sqrt{2}c + d = 0 \\ \text{K : d=0} \\ \text{A : }3\sqrt{3}b + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{a = }2\sqrt{2}c \\ \text{d = 0} \\ \text{b = 0} \end{cases}$$

Уравнение плоскости , сразу сокращая на d:
$2\sqrt{2}x + z = 0$
т.е. $\vec{n}_2(2\sqrt{2};0;1)$

5)$|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)| = |\frac{\vec{n}_1 * \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| * |\vec{n}_2|}| = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Т.е. $\cos\angle(AML;AKL) = (\pi - \cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$