Административная контрольная работа по стереометрии. 10 класс. 2014 год

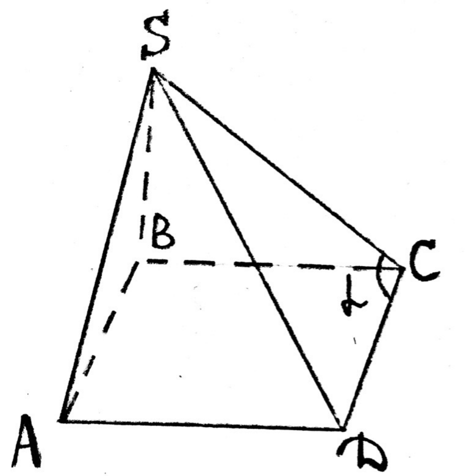
Подготовлено Соломиным В.Н. и Козаром И.Д. (11-3 класс)

Вариант 1

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ **лежит прямоугольник** $ABCD$, $AB = 16$, $BC = 9$. **Известно, что** $SB = 12$, $SA = 20$, $SC = 15$

1. Найдите угол между прямыми AB **и** SC

Способ 1



1) Для решение задачи поработаем с данными из условия.
Заметим, что $AB^2 + BS^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 20^2 = SA^2$, т.е. по обратной Th Пиф
$\triangle$-к BAS - прямоугольный, где $\angle SBA = 90°$
Т.е. $SB \perp AB$

2)Также из того, $ABCD$ - прямоугольник (усл.) следует, что $AB \perp BC$

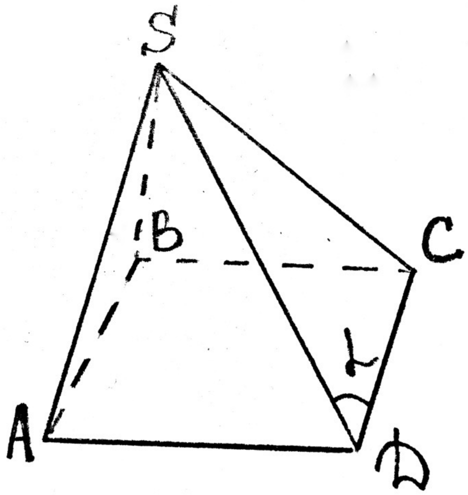
3)Из. п.1 и п.2 и $BC \times SB$ следует, что $AB \perp SBC$, т.е. $\angle AB, SC = 90°$

Ответ: $90°$

Это, пожалуй, самый простой способ решения этой задачи и другие либо сводятся к нему, либо слишком нагромождены

2. Найдите угол между прямыми AB и SD

Способ 1



1) Для решение задачи найдем угол, равный данному. Сделаем обычный $\parallel$ перенос при котором AB перейдет в CD, тогда $\angle AB, SD = \angle CD, SD = \angle SDC$.
Найдем этот угол

2)Рассмотри $\triangle$-к SCD: т.к. по д/п $AB \parallel CD$ и из задания 1 $AB \perp SC$, то $CD \perp SC$, т.е. $\triangle$-к SCD - прямоугольный

3)Из п.2 следует, что $\angle SDC = \arccos \frac{CD}{SD} = \arccos \frac{16}{\sqrt{16^2+15^2}} = \arccos \frac{16}{\sqrt{481}}$

Ответ: $\arccos \frac{16}{\sqrt{481}}$

Способ 2

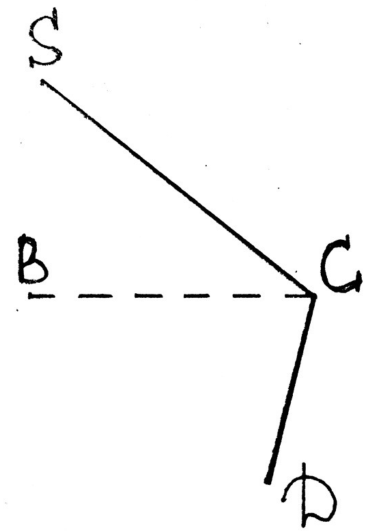
1)Можно также пойти более странным методом: найти $\cos SDC$ по ТКТУ:
Все данные взяты из заданий дальше

т.к.

3. Найдите двухгранный угол при ребре SC

Способ 1

1)Рассмотрим самый простой способ в этом случае
По ТКТУ :



В силу того, что $\cos\angle BCD = \cos\angle SCB * \cos\angle SCD + \sin\angle SCB * \sin\angle SCD * \cos\angle SC$

Получаем, что $\cos\angle SC = \frac{\cos\angle BCD - \cos\angle SCB * \cos\angle SCD}{\sin\angle SCB * \sin\angle SCD}$

2)Найдем все неизвестные cos и sin:

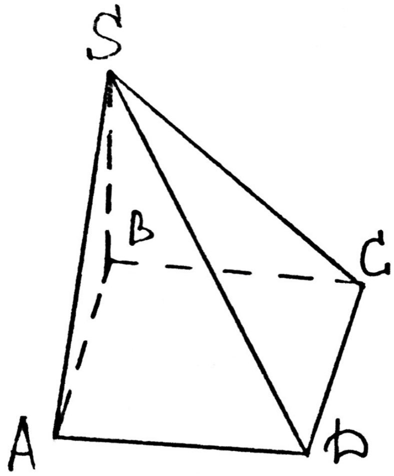
Например $\cos\angle BCD = 0$ очевидно находится, т.к. $\angle BCD = 90°$

Аналогично другие : $\cos\angle SCB = \frac{BC}{SC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ из $\triangle$-ка SCB прямоугольного (задание 1)
$\cos\angle SCD = 0$ (т.к. $\triangle$-к SCD - прямоугольный, где $\angle SCD = 90°$)

Тогда сразу вернемся к п.1 и обратим внимание на числитель.

3)Вернемся к п.1 : $\cos\angle SC = \frac{0 - \frac{3}{5} * 0}{...} = 0$, т.е.$\angle SC = 90°$
Ответ: $\angle SC = 90°$
Однако можно поступить по-другому

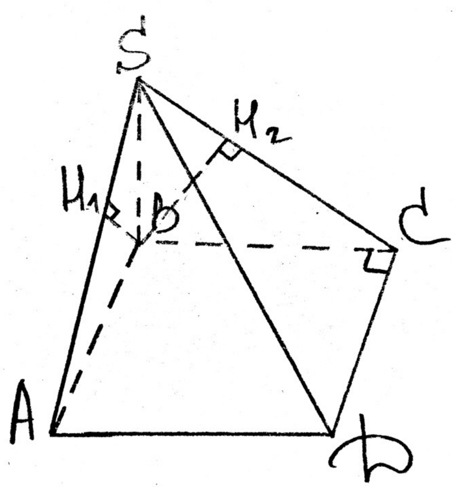
Способ 2



1)В силу того, что $SB \perp BC$ и $SB \perp AB$, где $AB \times BC$, получается по признаку, что $SB \perp ABC$ (все о $\perp$-х смотри в предыдущих пунктах)

2)Из п.1 следует, что $SB \perp AB$, тогда в силу того, что $CD \parallel AB$, получаем по признаку $\perp$-ти плоскостей, что $SDC \perp SBC$ (т.к. $CD \perp SBC$), т.е. $\angle BSCD = 90^\circ$

4. Найдите двухгранный угол при ребре SD

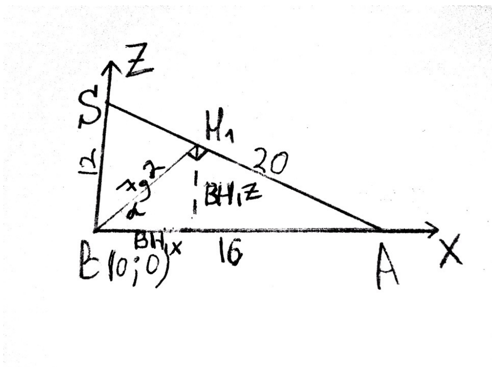


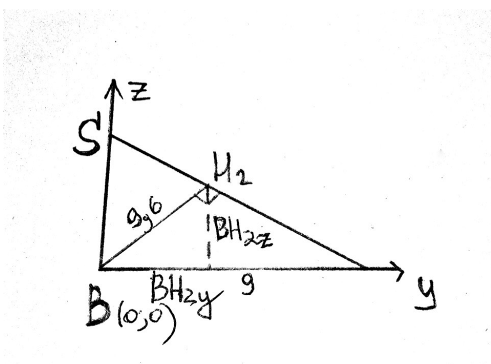
1)Сделаем д/п $BH_1 \perp SA$ ($BH_1 \subset SAB$) и $BH_2 \perp SC$ ($BH_2 \subset SBC$) для того, чтобы

$BH_1 \perp SAD$: в силу того, что $BH_1 \perp SA$ и $AD \perp SAB$ (значит и BH_1) (смотри раньше), т.е по прзнаку $BH_1 \perp SAD$.
Аналогично для $BH_2 \perp SCD$

Тогда $\angle SD = 180° - \angle H_1BH_2$ (BH_1DH_2)

2)Найдем BH_1 и BH_2 как модули, так и векторы:
Для этого просто рассмотрим два прямоугольных треугольника $\triangle SAB$ и $\triangle SCD$, в которых эти отрезки - высоты к гипотенузе





$BH_1 = \frac{SB*AB}{AS} = \frac{12*16}{20} = \frac{96}{10}$ и
$BH_2 = \frac{SB*BC}{SC} = \frac{12*9}{15} = \frac{72}{10}$

Найдем координаты: $BH_{1z} = \frac{H_1A}{BA} * BH_1$, где $H_1A = \frac{BA^2}{SA} = \frac{16^2}{20}$ - пропорциональные отрезки, а $\frac{H_1A}{BA}$ - $\sin\alpha$, т.е. $BH_{1z} = \frac{\frac{16^2}{20}}{16} * 7.2 = \frac{4}{5} * 7.2$

Аналогично $BH_{1x} = \frac{3}{5} * 7.2$ через $\cos\alpha$, где $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$
Таким образом, $\vec{BH_1}(\frac{3}{5} * 7.2, 0, \frac{4}{5} * 7.2)$

Ровно таким же способом найдем координаты BH_2:

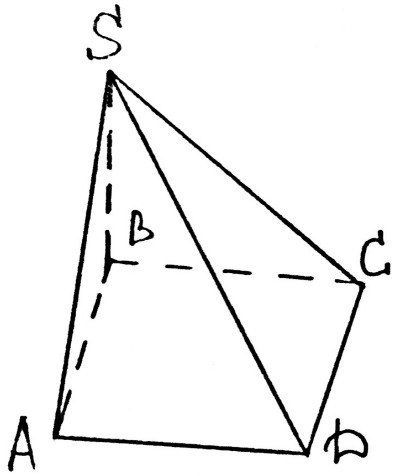
$BH_{2z} = \frac{H_2C}{BC} * BH_2 = \frac{\frac{9^2}{15}}{9} * 9.6 = \frac{3}{5} * 9.6$ и
$BH_{2y} = \cos\alpha * BH_2 = \frac{4}{5} * 9.6$

Таким образом, $B\vec{H}_2(0, \frac{4}{5} * 9.6, \frac{3}{5} * 9.6)$

3)Из п.1 и п.2 следует, что $\cos\alpha = \frac{B\vec{H}_1 * B\vec{H}_2}{|B\vec{H}_1| * |B\vec{H}_2|} = \frac{0+0+\frac{3}{5}*9.6*\frac{4}{5}*7.2}{9.6*7.2} = \frac{12}{25}$
Тогда, если вернуться к п.1, то в силу того, что $\cos 180^\circ - \alpha = -\cos\alpha$ имеем
Ответ: $\angle SD = \arccos -\frac{12}{25}$

Способ 2

(ТКТУ)



1)По Th cos трехгранного угла: $\cos\angle ASC = \cos\angle CDS * \cos\angle ADS + \sin\angle CDS * \sin\angle ADS * \cos SD$

Тогда найдем все неизвестные элементы:

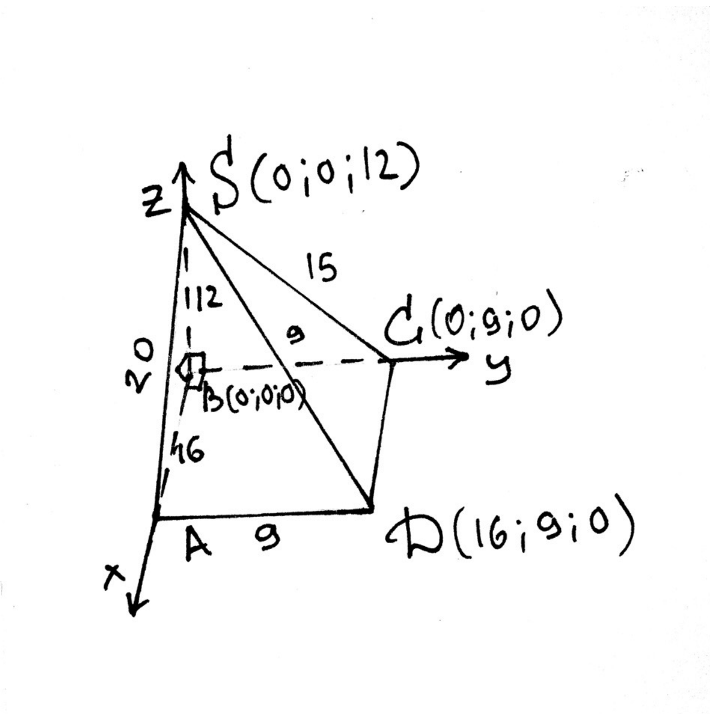
$\cos\angle ASC = \frac{20^2+15^2-25^2}{2*20*15} = \frac{0}{2*20*15} = 0$
$\cos\angle CDS = \frac{481+16^2-15^2}{2*\sqrt{481}*16} = \frac{512}{32*\sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}}$ $(SD = \sqrt{481})$
$\cos\angle ADS = \frac{481+9^2-20^2}{2*\sqrt{481}*9} = \frac{162}{18*\sqrt{481}} = \frac{9}{\sqrt{481}}$

$\sin\angle CDS = \sqrt{1 - \frac{16^2}{481}} = \sqrt{\frac{225}{481}} = \frac{15}{\sqrt{481}}$
$\sin\angle ADS = \sqrt{1 - \frac{9^2}{481}} = \sqrt{\frac{400}{481}} = \frac{20}{\sqrt{481}}$

Т.е. имеем: $0 = \frac{16}{\sqrt{481}} * \frac{9}{\sqrt{481}} + \frac{15}{\sqrt{481}} * \frac{20}{\sqrt{481}} \cos SD$, т.е.
$\cos SD = -\frac{\frac{16}{\sqrt{481}} * \frac{9}{\sqrt{481}}}{\frac{15}{\sqrt{481}} * \frac{20}{\sqrt{481}}} = -\frac{12}{25}$

5. Найдите расстояние от A до CSD

Способ 1



Сразу возьмем быка за рога. Используем метод координат: найдем SCD и A, затем все подставим по формуле.
1) Найдем SCD: $S(0;0;12), C(0;9;0), D(16;9;0)$, тогда исходя из уранения плоскости $ax + by + cz = 0$, подставляя значения

$$\begin{cases} \text{S : 12c+d=0} \\ \text{C : 9b+d=0} \\ \text{D : 16a+9b+d=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{S : 4c=-3b} \\ \text{C : a=0} \\ \text{D : d=-9b} \end{cases}$$

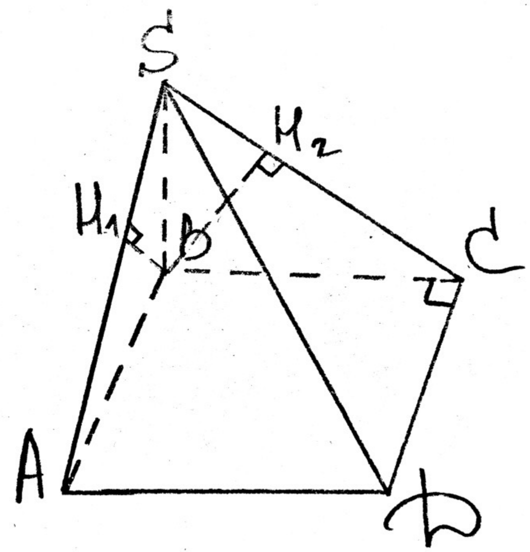
Тогда уравненение плоскости соответсвенно: $0 * x + by - \frac{3}{4}bz - 9b = 0$, т.е. $y - \frac{3}{4}z - 9 = 0$

2)Координату A найти несложно $A(16, 0, 0)$

3)Тогда по формуле расстояния от точки до плоскости: $\frac{0+0+0+9}{\frac{5}{4}} = 7,2$
Ответ: $\rho(A, SCD) = 7,2$

Способ 2

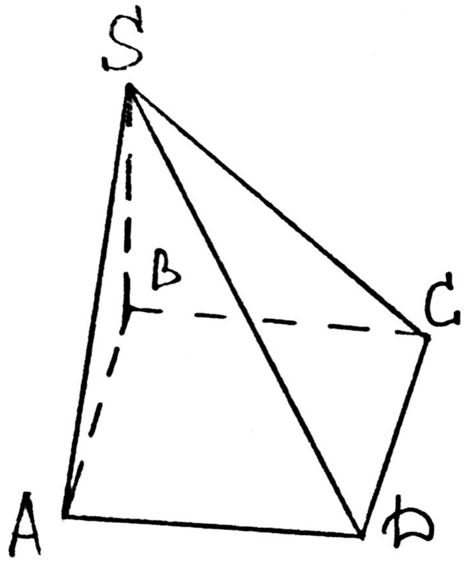
(Попробуем посчитать в лоб)



1)В силу того, что $AB \parallel CD$, имеем, что $AB \parallel SCD$ (по признаку)

2)Пусть $\rho(A, SCD) = \rho(B, SCD) = BH_2 \perp SCD (.4)$
В то время, как $BH_2 = 7,2$

6. Найдите угол между прямой SD и плоскостью SAB



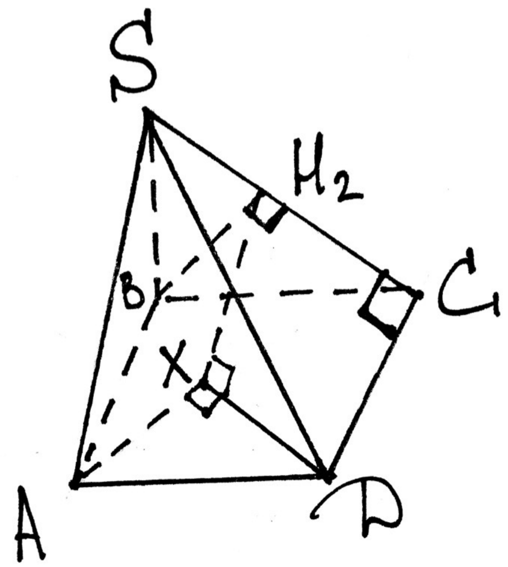
1)Пусть $\angle SD, SAB = \alpha$, тогда
$DA \perp SAB (DA \parallel CB \perp SAB$ (смотри ранее)

2)SA - проекция SD на SBA , т.е. $\alpha = \angle DSA = \arctan \frac{9}{20}$ (из $\triangle$-ка DSA)
Ответ: $\arctan \frac{9}{20}$

7. Найдите угол между прямой AC и плоскостью SCD

Способ 1

(Возьмемся за определение)



1)Пусть A - проекция на $SCD : A \to X$ $(X \in SCD$

2)$AB \parallel CD$, а $H_2 \in CD$ (Что такое H_2 смотри ранее), т.е., по Th о пересечении плоскости параллельной ей прямой, $H_2X \parallel CD$

3)$BH_2 \perp SCD$ (Все также ранее, например в п.4), т.е. $AX \perp SCD$(Из д/п), тогда $AX \parallel BH_2$

4)Заметим, что из п.2 и п.3 следует, что у ABH_2X все стороны попарно параллельны, т.е. по def ABH_2X - $\parallel$-м, тогда $XH_2 = AB = CD$ (Св-во)

Таким образом, в силу того, что $XH_2 = CD$ и $H_2X \parallel CD$, CH_2XD - $\parallel$-м, т.е. $XD = H_2C$ (СВ-во)
Причем CH_2XD не только $\parallel$-м
Действительно, если заметить, что $CD \perp BCS$ (Смотри ранее), то получается , что $\angle DCH_2 = 90°$, т.е. по признаку DXH_2C еще и прямоугльник

5)Из этих пунктов имеем: CX - проекция AC на SCD, т.е. $\angle AC, SCD = \angle XAC$
Что ж, найдем его

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{337}$
$AX = BH_2 = 7.2$ (Смотри пункты ранее)
Тогда $\angle AC, SCD = \angle XAC = \arcsin \frac{AX}{AC} = \arcsin \frac{7.2}{\sqrt{337}}$

Ответ: $\arcsin \frac{7.2}{\sqrt{337}}$

Способ 2

(Пункт 1, но совсем чуть-чуть по-дургому)

1)Можно взять не только arcsin. Что, если посчитал другие величины ?

2)Например из способа 1 следует, что $DX = CH_2 = 5.4$(Из п.4)
Тогда, в силу того, что DXH_2C - прямоуглльник : $CX = \sqrt{DX^2 + CD^2} = \sqrt{54^2/100 + 256} = \sqrt{\frac{2916+25600}{100}} = \frac{\sqrt{28516}}{10} = \frac{2\sqrt{7129}}{10} = \frac{\sqrt{7129}}{5}$

3)Аналогичные рассуждения к способу 1, просто найдем tan:
$\tan \angle XAC = \frac{XC}{AX} = \frac{\frac{\sqrt{7129}}{5}}{7.2} = \frac{\sqrt{7129}}{36}$

Ответ: $\arctan \frac{\sqrt{7129}}{36}$

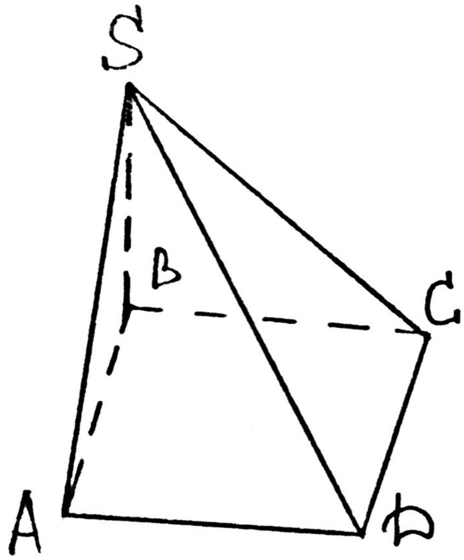
Способ 3 (Просто внимательно посмотрим на прошлые пункты)

1)Т.к. $\rho(A, SCD) = \rho(B, SCD)$ (Смотри ранее), то просто $\arcsin \angle XAC = \frac{\rho(A,SCD)}{AC} = \frac{7.2}{\sqrt{337}}$

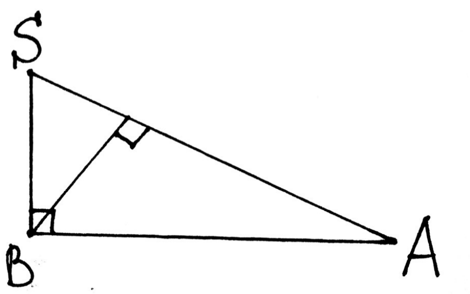
8. Найдите расстояние между прямыми SA и BC

Способ 1

(Обычная проекция на плоскость)



1)Спроецируем BC на SAB так, что она перейдет в C ($BC \perp SAB$ смотри ранее)



2)Рассмотрим $\triangle$-к SAB:
Просто найдем $BH_1 = 9.6$ (Пункт 4)
Овтет: $\rho(SA; BC) = 9.6$

Способ 2

(Общий $\perp$)

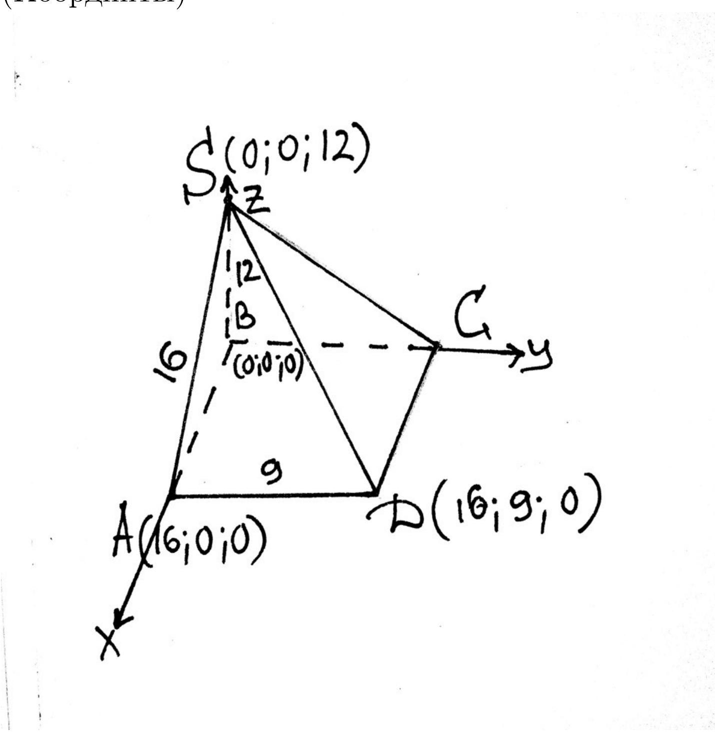
1)Заметим, что $BH_1 \perp SA$ и $BH_1 \perp BC$ (Из пункта 4), тогда это их общий перпенди-

куляр.
Также $BH_1 = 9.6$

Ответ: $\rho(SA; BC) = 9.6$

Способ 3

(Координты)



1)В силу того, что $BC \parallel SAD$, $\rho(B, SAD) = \rho(C, SAD)$ - искомое
Найдем это расстояние:

2)$SAD(A(16, 0, 0); D(16, 9, 0); S(0, 0, 12))$

$$\begin{cases} \text{A : 16a+d=0} \\ \text{D : 16a+9b+d=0} \\ \text{S : 12c+d=0} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{A : b=0} \\ \text{D : 16a=-d} \\ \text{S : 12c=-d} \end{cases}$$

Тогда уравненение плоскости соответсвенно:
$-\frac{1}{16} * xd + 0 * y - \frac{1}{12}zd + d = 0$, т.е.
$-\frac{1}{16}x - \frac{1}{12}z + 1 = 0$, таким образом
$-3x - 4z + 48 = 0$

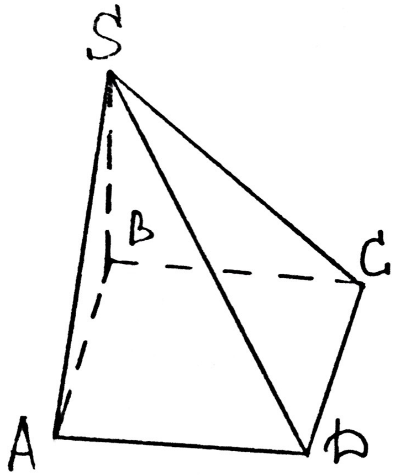
2)Координату B найти несложно $A(0,0,0)$

3)Из п.1 и п.2 имеем: $\rho(B, SAD) = \frac{0+0+0+48}{9+0+16} = \frac{48}{5} = 9.6$ (по формуле расстояния от точки до плоскости)
Ответ: $\rho(SA; BC) = 9.6$

9. Найдите расстояние между прямыми SD и AC

Способ 1

(Объемы)



1)$V_{ACDS} = \frac{1}{2}V$

2)$V_{ACDS} = \frac{1}{6} * AC * SD * \sin\angle AC, SD * \rho(SD, AC) = \frac{1}{6} * \sqrt{337} * \sqrt{481} * \sin\angle AC, SD * \rho(SD, AC$

Таким образом, найдя sin, решим задачу, потому что легко будет найти расстояние.

3) Найдем этот sin: введем систему координат, тогда $\vec{DS}(-9; -16; 12), \vec{AC}(9; -16; 0)$

В силу того, что $\cos\angle AC, SD = \frac{|\vec{DS} * \vec{AC}|}{|\vec{DS}| * |\vec{AC}|} = \frac{175}{\sqrt{431} * \sqrt{337}}$

Дальше легко найти sin: $\sin\angle AC, SD = \sqrt{1 - \frac{175^2}{481 * 337}}$

4)Собственно, задача решена: дело за малым, выразим $\rho(SD, AC) = \frac{V_{ACDS} * 6}{AC * SD * \sin\angle AC, SD} = \frac{\frac{1}{2} * V * 6}{AC * SD * \sin\angle AC, SD} = \frac{3V}{\sqrt{337} * \sqrt{481} * \sqrt{1 - \frac{175^2}{481 * 337}}}$

Стоит сказать, что $V = \frac{1}{3} SB * AB * BC = \frac{1}{3} * 16 * 9 * 12 = 576$ (Объем всей пирамиды)

Т.е. $\rho(SD, AC) = \frac{3*576}{\sqrt{337}*\sqrt{481}*\sqrt{1-\frac{175^2}{481*337}}} = \frac{144}{\sqrt{913}}$

Ответ: $\rho(SD, AC)$

Способ 2

(Проекции или просто в лоб)

Спроецируем $SDAC$ на плоскость α: $AC \to O$
1) $D \to D_1$
$S \to S$
$AC \to O$

2)Тогда имеем: $\rho(SD, AC) = \rho O; D_1S$ - найдем его

3)Сделаем д/п D_2 - точка пересчения BO и AD.

Отсюда знаем D_2 , потому что $B\vec{D}_2 * \vec{AC} = 0$, т.е.
$9 * x + 16 * (-16) = 0$, т.е.