Решение административной работы

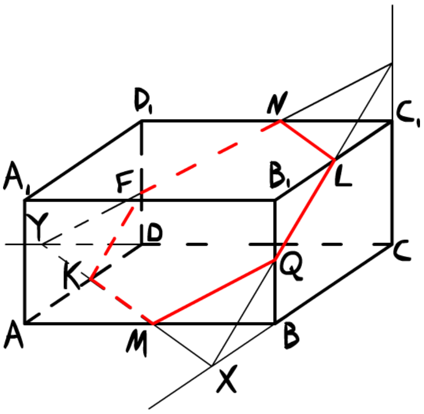
Подготовили Соломин В. Н. и Нургалиев Т. Р.

Задача 1

Условие: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - правильная четырёхугольная призма, $AB = 2$, $AA_1 = 1$, K - середина AD, L - середина B_1C_1

a) **Построить сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки K и L параллельно BD**

Решение:



1) Проводим следы сечения через K и L параллельно BD в плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$ (по теореме о линии пересечения плоскости, параллельной прямой, с плоскостью, содержащей эту прямую)

По теореме Фалеса M и N - середины AB и C_1D_1 соответственно

2) Прямая KM пересекает BC в точке X. $\angle BXM = 45^o$, $\angle MBX = 90^o$, откуда $BX = BM = \frac{AB}{2} = 1$

3) Прямая LX пересекает BB_1 в точке Q. $XB \parallel B_1L$, $XB=B_1L$, откуда XB_1LB - параллелограмм, Q - точка пересечения диагоналей, значит Q - середина BB_1. Аналогично середина DD_1 - точка F - также принадлежит сечению. **__KFNLQM - искомое сечение__**

b) **Найти площадь сечения**

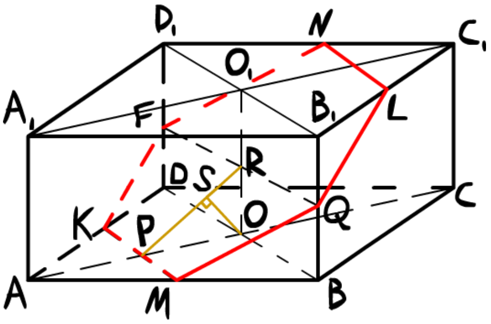
Решение:

1) Дополнительное построение: O и O_1 - точки пересечения диагоналей ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. OO_1 пересекает FQ в точке R. AO пересекает KM в точке P.
2) $AO \perp BD$ (диагонали квадрата ABCD), $KM \parallel BD$ (KM - средняя линия ABD), значит $KM \perp AO$.

   AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, значит $AA_1 \perp KM$. AA_1 и AO пересекаются, откуда по признаку __KM перпендикулярна плоскости AA_1C__

Из симметрии относительно прямой QF площадь KMQF равна площади FQLN. $S_{сечения} = 2S_{KMQF}$. Площадь KMQF можно найти 2 способами:

1 способ:



1) $KM \parallel BD \parallel FQ$, KF и MQ не параллельны, значит FQMK - трапеция.
2) $KM \perp AA_1C$, откуда $KM \perp PR$, откуда PR - высота KMQF.
3) P - середина AO (KM - средняя линия), R - середина OO_1(По теореме Вариньона OFO_1Q - параллелограмм, R - точка пересечения диагоналей), откуда PR - средняя линия AOO_1, $PR = \frac{1}{2}AO_1$.

4) OO_1 перпендикулярна ABC, откуда $\angle AOO_1 = 90^{\circ}$. По теореме Пифагора $AO_1 = \sqrt{AO^2 + OO_1^2} = \sqrt{3}$. $PR = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5) $KM = \frac{DB}{2} = \sqrt{2}$. $FQ = DB = 2\sqrt{2}$
6) $S_{KMQF} = \frac{KM+FQ}{2} \cdot PR = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

2 способ:

$KM \perp AA_1C$, откуда $RP \perp KM$, $PO \perp KM$, значит $\angle RPO$ - линейный двугранного угла $\angle RKMO$ между плоскостями α и ABC.

KMBD - проекция KMQF на плоскость ABC, откуда $S_{KMQF} = \frac{S_{KMBD}}{\cos \angle RPO}$

1) $S_{KMBD} = \frac{3}{4} S_{ABD} = 3$ (KM - средняя линия)
2) $PO = \frac{1}{4} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\cos \angle RPO = \frac{PO}{PR} = \sqrt{\frac{2}{3}}$
4) $S_{KMQF} = 3/\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

Итого $S_{сечения} = 2S_{KMQF} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

<u>Ответ:</u> $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

c) **Найти угол между плоскостью α и плоскостью ABC**

Решение:

1 способ(линейный угол):

Из пункта b) линейным является $\angle RPO = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

2 способ(отношение площадей):

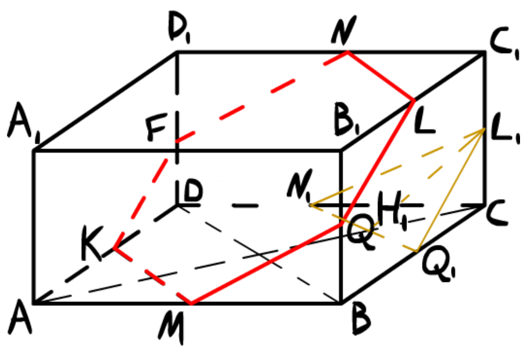
KMBD - проекция KMQF на плоскость ABC, тогда cos угла между плоскостями = $S_{KMBD}/S_{KMQF} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (из пункта b)), откуда угол равен $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

3 способ(угол между нормалями):

Дополнительное построение: $OS \perp PR$. $OS \perp KM$ ($OS \subset AA_1C$), PR и KM пересекаются, значит по признаку $OS \perp \alpha$. OS - нормаль к α, OO_1 - нормаль к ABC, косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормалями = $\cos \angle SOR = \sin \angle PRO = \cos \angle RPO = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Искомый угол равен $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4 способ:



Вместо того, чтобы находить угол между α и ABC, можно найти угол между ABC и плоскостью, параллельной α.

Дополнительное построение: Q_1, L_1, F_1 - середины BC, CC_1 и DC соответственно. $Q_1L_1 \parallel QL$, $L_1F_1 \parallel FN$, Q_1L_1 и L_1F_1 пересекаются, откуда $Q_1L_1F_1$ параллельна

α. Для нахождения угла между ABC и $Q_1L_1F_1$ можно использовать все способы, предложенные выше, рассмотрим 1 способ (линейный угол):

1) AO пересекает F_1Q_1 в точке H_1. F_1Q_1 параллельна KM(KF_1Q_1M - параллелограмм по теореме Вариньона), откуда F_1Q_1 перпендикулярна AA_1C (из пункта b)), значит $F_1Q_1 \perp H_1C$, $F_1Q_1 \perp H_1L_1$, откуда $\angle L_1H_1C$ - линейный угла между ABC и $Q_1L_1F_1$
2) $L_1C = \frac{1}{2}$, $H_1C = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\angle H_1CL_1 = 90^\circ$($CC_1$ перпендикулярна ABC), значит по теореме Пифагора $H_1L_1 = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\cos\angle L_1H_1C = \sqrt{\frac{2}{3}}$, откуда $\angle L_1H_1C = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

<u>Ответ:</u> **$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$**

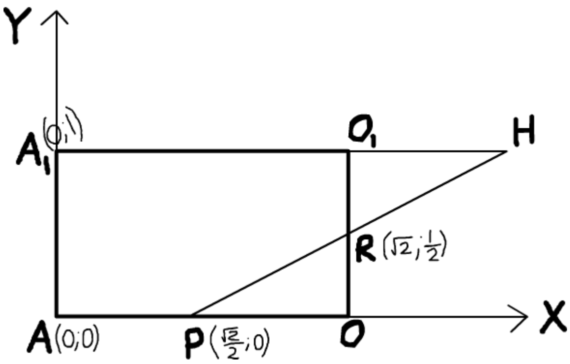
d) Найти расстояние от A_1 до α

Решение:

Плоскости AA_1C и α перпендикулярны (так как $KM \perp AA_1C$ из пункта b), $(KM) \subset \alpha$).Тогда перпендикуляр из A_1 на α - это перпендикуляр к линии пересечения этих плоскостей PR. Сделаем выносной чертёж.

Длину этого перпендикуляра можно найти двумя способами:

1 способ(метод координат):



Введём координатные оси, как на рисунке.

Найдём координаты нужных нам точек: $A_1(0;1)$, $P(0{,}5\sqrt{2};0)$, $R(\sqrt{2};0{,}5)$

Найдём уравнение прямой PR: $ax + by + c = 0$

P: $0{,}5\sqrt{2}a + c = 0 \Leftrightarrow a = -c\sqrt{2}$

R: $\sqrt{2}a + 0{,}5b + c = 0$, $a = -c\sqrt{2} \Rightarrow -2c + 0{,}5b + c = 0 \Leftrightarrow b = 2c$

PR: $-\sqrt{2}x + 2y + 1 = 0$

$\rho(A_1,(PR)) = \frac{|2+1|}{\sqrt{4+2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2 способ(подсчёт площади двумя способами):

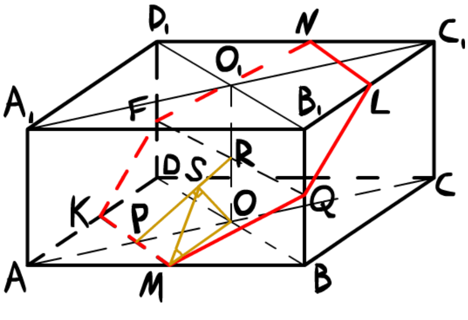
1) Дополнительное построение: A_1C_1 пересекает PR в точке H. $\rho(A_1,(PR)) = 2S(A_1PH)/HP$.
2) $HP = 2PR = \sqrt{3}$ (из пункта б))
3) $S(A_1PH) = \frac{1}{2}AA_1 \cdot A_1N = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
4) $\rho(A_1,(PR)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

<u>Ответ:</u> $\frac{\sqrt{6}}{2}$

e) Найти угол между AD и α

Решение:

1 способ:

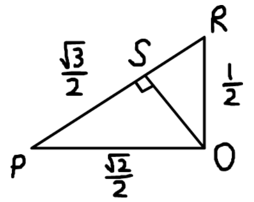


OM параллельна AD (средняя линия ABC), откуда угол между AD и α равен углу между OM и α = $\angle OMS$

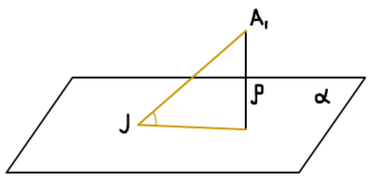
1) $OM = \frac{1}{2}BC = 1$

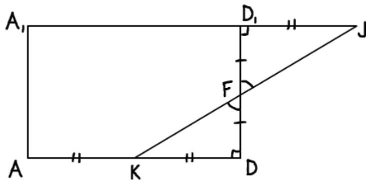
2) Найдём OS подсчётом площади PRO двумя способами: $S_{PRO} = \frac{1}{2} PO \cdot OR = \frac{1}{2} OS \cdot PR$, откуда OS = $\frac{\sqrt{6}}{6}$

3) $\sin \angle OMS = \frac{OS}{OM} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, откуда $\angle OMS = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$



2 способ:



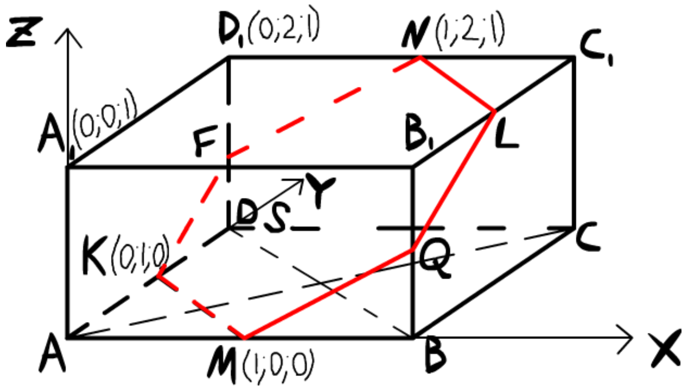


A_1D_1 параллельна AD, откуда искомый угол равен углу между A_1D_1 и α. Расстояние от A_1 до α найдено выше. Чтобы найти синус искомого угла, надо найти расстояние от A_1 до пересечения A_1D_1 с α (Длину гипотенузы). Это пересечение будет пересечением A_1D_1 с KF. Пусть KF пересекается с A_1D_1 в точке J. Сделаем чертёж.

Так как K и F - середины AD и DD_1, то D_1J = KD = 1, откуда A_1J = 3. Тогда $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3 способ(угол между векторами):

Введём координатное пространство, как на рисунке.



Найдём координаты нужных точек:
$A_1(0;0;1)$, $D_1(0;2;1)$, откуда координаты вектора $\vec{A_1D_1}$ (0;2;0).
M(1;0;0), K(0;1;0), N(1;2;1)
Найдём уравнение плоскости α : ax + by +cz + d = 0
M: a + d = 0 ⇔ a = -d
K: b + d = 0 ⇔ b = -d
N: a + 2b + c + d =0, a=-d,b=-d ⇒ c = -2d
$\alpha : x + y + 2z - 1 = 0$

Координаты вектора нормали $\vec{n}$ (1;1;2)

Синус угла между прямой и плоскостью равен синусу угла между соответствующим ей вектором и нормали к плоскости

$\sin\varphi = \frac{\vec{A_1D_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{A_1D_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, откуда $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

<u>Ответ:</u> $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$

f) Найти расстояние между AA_1 и LQ

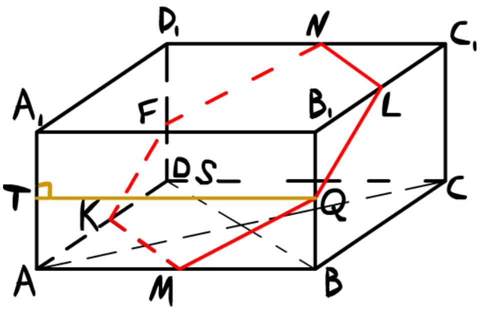
Решение:

1 способ:

Спроецируем на плоскость $A_1B_1C_1$: $AA_1 \rightarrow A_1$ (так как $AA_1 \perp A_1B_1C_1$)

$LQ \rightarrow B_1L$ ($L \in A_1B_1C_1$, $QB_1 \perp A_1B_1C_1$)

Тогда расстояние между AA_1 и LQ равно расстоянию от A_1 до $B_1L = A_1B_1 = 2$



2 способ(общий перпендикуляр):

Дополнительное построение: Опустим перпендикуляр из Q на AA_1 - QT. Он параллелен AB, перпендикулярен BB_1C, откуда $QT \perp LQ$.

Значит QT - общий перпендикуляр. QTA_1B_1 - параллелограмм (2 пары параллельных сторон), откуда $QT = A_1B_1 = 2$

3 способ(расстояние между параллельными прямыми):

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые. В нашем случае это плоскости AA_1B_1 и CC_1D_1, расстояние между которыми равно 2.

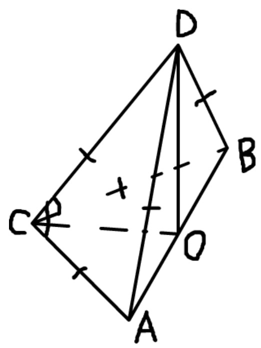
<u>Ответ:</u> 2.

Задача 2

Условие: ABCD - пирамида, AC = BC = DC = 4, $\angle ACB = 90^o$, $\angle ACD = \angle BCD = 60^o$.

a) **Найти угол между AD и BC**

Решение:

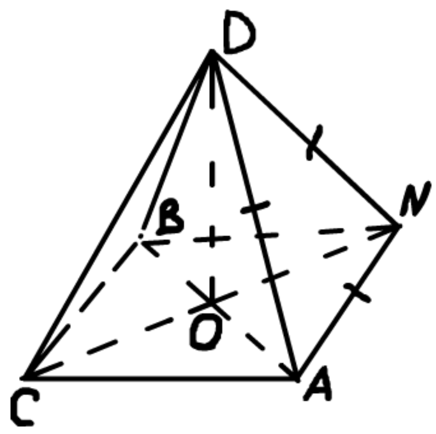


треугольники ACD и BCD равносторонние (AC = BC = DC, $\angle ACD = \angle BCD = 60^o$), откуда D равноудалена от A, B и C.

Дополнительное построение: DO - высота, где O - центр описанной окружности)

Треугольник ABC - прямоугольный, откуда O - середина AB.

Угол между AD и BC можно найти двумя способами:

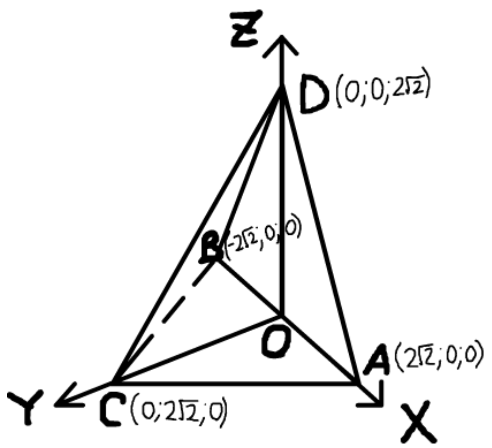


1 способ:

Дополнительное построение: отрезок AN, равный и параллельный BC. Угол между AD и BC равен углу между AD и AN = $\angle DAN$.

ANBC - параллелограмм, откуда ON = OC (O - точка пересечения диагоналей), OD - общая, $\angle COD = \angle DON = 90^o$(DO - высота), значит по 2 сторонам и углу между ними треугольники COD и DON равны, откуда DN = CD = 4.

AN = BC = 4 = AD = DN, откуда треугольник DAN - равносторонний, $\angle DAN = 60^o$.



2 способ:

Введём координатное пространство, как на рисунке:

По теореме Пифагора $AB = 4\sqrt{2}$. $OA = OB = OC = 2\sqrt{2}$.

Найдём координаты необходимых точек:

$A(2\sqrt{2};0;0)$, $B(-2\sqrt{2};0;0)$, $C(0;2\sqrt{2};0)$, $D(0;0;2\sqrt{2})$

Координаты векторов $\vec{AD}$ (-$2\sqrt{2}$;0;$2\sqrt{2}$), $\vec{CB}$ (-$2\sqrt{2}$;-$2\sqrt{2}$;0)

$\vec{AD} \cdot \vec{BC}$ = 8 = BC · AD · cos α

cos α = 0,5 , откуда α = 60°.

Ответ: 60°.

b) Найти расстояние между AD и BC

Решение:

1 способ(подсчёт объёма двумя способами):

Мы знаем формулу V = $\frac{1}{6} a \cdot b \cdot c \cdot sin\varphi$, где a, b - длины противолежащих сторон тетраэдра, c - расстояние между ними, φ − угол между ними.

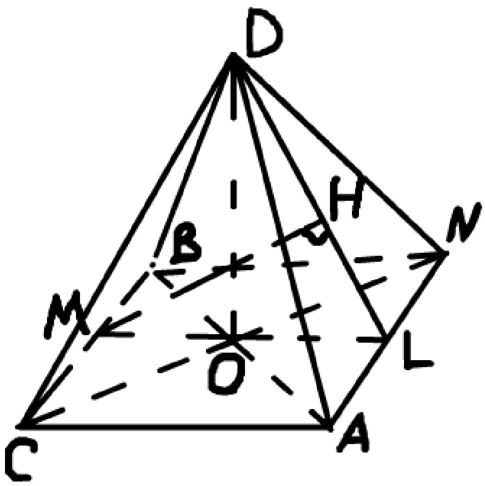
С другой стороны, объём тетраэдра равен $\frac{1}{3}$ DO · S_{ABC} = $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

Приравняем эти два выражения:

$\frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}$ AD · BC · $\frac{\sqrt{3}}{2}$ · ρ (AD;BC)

ρ (AD;BC) = $4\sqrt{\frac{2}{3}}$

2 способ(расстояние от прямой до плоскости):



BC параллельна AN, откуда BC параллельна плоскости ADN, содержащей прямую AD, значит расстояние от AD до BC равно расстоянию от BC до ADN, что равно расстоянию от M до ADN, где M - середина BC.

Дополнительное построение: MH - перпендикуляр из M на DL, где L - середина AN.

AN перпендикулярна плоскости MLN(ML перпендикулярна AN как средняя линия, DO - высота), откуда AN перпендикулярна MH, DL и AN пересекаются, значит по признаку MH перпендикулярна ADN, откуда расстояние от M до ADN равно длине MH.

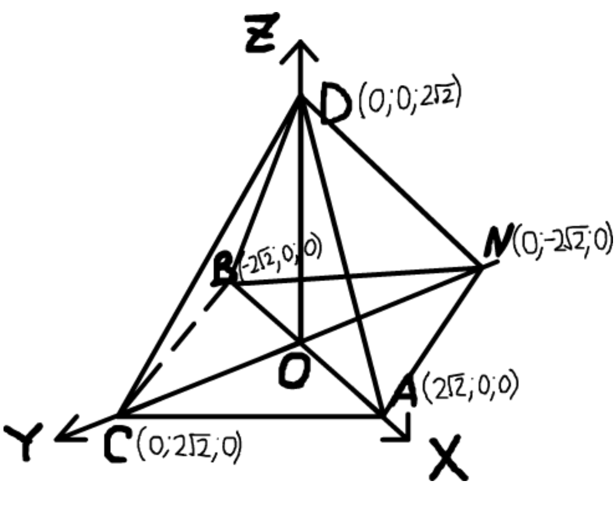
MH можно найти, посчитав площадь треугольника MDL двумя способами.

$S_{MDL} = \frac{1}{2}$ MH · DL = $\frac{1}{2}$ DO · ML

По теореме Пифагора в треугольнике DAN DL = $2\sqrt{3}$, ML = AC =4, DO = $2\sqrt{2}$

MH = $4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3 способ(расстояние от прямой до плоскости с помощью метода координат):



Из 2 способа известно, что расстояние от BC до AD равно расстоянию от BC до ADN, что равно расстоянию от C до ADN. Из пункта а) нам известны координаты точек A,B,C и D, координаты точки N (0;-$2\sqrt{2}$;0).

Найдём уравнение плоскости ADN: ax+by+cz+d =0

A: $2\sqrt{2}$a+d = 0 ⇔ a = -$\frac{d}{2\sqrt{2}}$

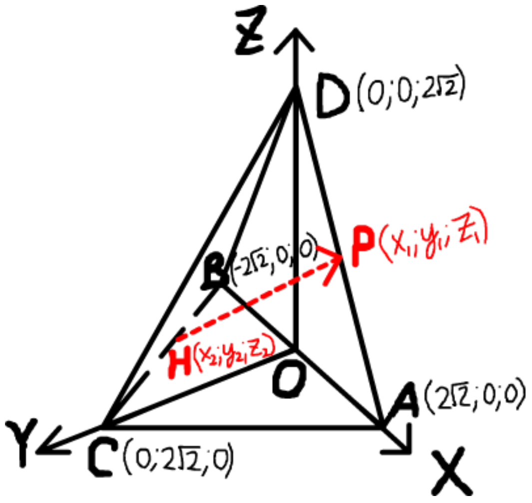
N: -2$\sqrt{2}$b+d=0 ⇔ b = $\frac{d}{2\sqrt{2}}$

D: $2\sqrt{2}$c+d = 0 ⇔ c = -$\frac{d}{2\sqrt{2}}$

ADN: $-x+y-z+2\sqrt{2}=0$

$\rho(C;ADN)=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{3}}=4\sqrt{\frac{2}{3}}$

4 способ(метод координат):



Пусть HP - общий перпендикуляр к отрезкам BC и AD.

Координаты точки $P(x_1;y_1;z_1)$, точки $H(x_2;y_2;z_2)$

$\vec{HP}$ - искомый, если выполнены 4 условия:

1) $\vec{HB}$ параллелен $\vec{CB}$: $\vec{HB}=b\cdot\vec{CB}$

$-2\sqrt{2}-x_2=b(-2\sqrt{2})$

$-y_2=b(-2\sqrt{2})$

$z_2=0$

2) $\vec{AP}$ параллелен $\vec{AD}$: $\vec{AP}=a\cdot\vec{AD}$

$x_1-2\sqrt{2}=a(-2\sqrt{2})$

$y_1=0$

$z_1=2\sqrt{2}a$

3) $\vec{HP}$ перпендикулярен $\vec{BC}$: $\vec{HP}\cdot\vec{BC}=0$

$(x_1-x_2)(-2\sqrt{2})+(y_1-y_2)(-2\sqrt{2})=0$, $y_1=0$(из 2)) $\Rightarrow x_1-x_2-y_2=0$

4) $\vec{HP}$ перпендикулярен $\vec{AD}$: $\vec{HP}\cdot\vec{AD}=0$

$(x_1-x_2)(-2\sqrt{2})+(z_1-z_2)2\sqrt{2}=0$, $z_2=0$(из 1)) $\Rightarrow x_1-x_2-z_1=0$

Из 3) и 4) $\mathbf{y_2=z_1=x_1-x_2}$. Обозначим (*)

Из 1) $y_2=x_2+2\sqrt{2}$, откуда по (*) $x_1-x_2=x_2+2\sqrt{2}$

Из 2) $z_1=2\sqrt{2}-x_1$, откуда по (*) $x_1-x_2=2\sqrt{2}-x_1$

Из этих двух выражений получаем $x_1=-x_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Подставляем в (*): $x_1-x_2=y_2=z_1=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

HP = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=4\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ответ: $4\sqrt{\frac{2}{3}}$