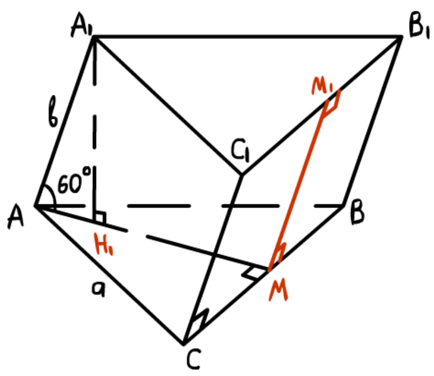
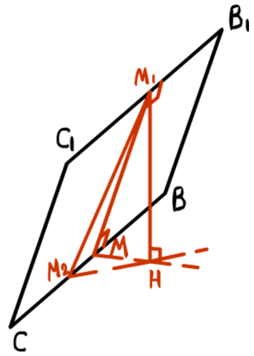
Условие:
В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна a. Двугранный угол при ребре BC равен 120°, а прямая AA_1 составляет с плоскостью ABC угол 60°. Известно, что AB = a, AA_1 = b, и $AC_1 \perp CB_1$.

1. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ABC:



1) Так как $ABCA_1B_1C_1$ - призма, то $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$ $\Rightarrow$ Расстояние от точки B_1 до плоскости ABC равно расстоянию от точки A_1 до плоскости ABC.
2) Доп. построение: $(AM) \perp (BC)$
   Так как $\triangle ABC$ - равносторонний, то AM - высота, медиана, биссектриса.
3) Доп. построение: $(MM_1) \perp (BC)$
   $(AM) \perp (BC)$, $(MM_1) \perp (BC)$ $\Rightarrow$ $\angle M_1MA$ - линейный угол двугранного угла при ребре BC $\Rightarrow$ $\angle M_1MA = 120°$.
4) $(M_1M) \parallel (AA_1)$(смотри пояснение)
5) $(M_1M) \parallel (AA_1),(BB_1),(CC_1)$ $\Rightarrow$ $(BB_1),(CC_1) \perp (BC)$ $\Rightarrow$ BB_1C_1C - прямоугольник.
   Доп. построение: $(A_1H_1) \perp (AM)$; $(BC) \perp (M_1MH)$ $\Rightarrow (A_1H_1) \perp (BC)$, $(AM) \perp (BC) \Rightarrow$ $(A_1H_1) \perp (ABC)$ $\Rightarrow$
   A_1H_1 - расстояние от точки A_1 до плоскости ABC. $\angle A_1AH = 60°$ (Угол между AA_1 и ABC) $\Rightarrow$
   $A_1H_1 = AA_1 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}b}{2}$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}b}{2}$



Пояснение:
$(AA_1) \parallel (CC_1) \Rightarrow (AA_1) \parallel (CC_1B_1)$
Доп.построение: $(M_1M_2) \parallel (AA_1)$. Так как $(AA_1) \parallel (CC_1B_1)$, (.)$M_1 \in (CC_1B_1)$, то $(M_1M_2) \subset (CC_1B_1)$.
Доп.построение: $(M_1H) \perp (ABC)$. Тогда $\angle M_1M_2H$ - это угол между (M_1M_2) и (ABC), $(M_1M_2) \parallel (AA_1)$ $\Rightarrow$
$\angle M_1M_2H$ равен углу между (AA_1) и (ABC) $\Rightarrow$ $\angle M_1M_2H = 60° \Rightarrow M_1M_2 = M_1H/\sin 60°$.

$(M_1H) \perp (ABC) \Rightarrow (M_1H) \perp (BC)$, $(M_1M) \perp (BC)$, $(M_1H) \times (M_1M)$ $\Rightarrow$ $(BC) \perp (M_1MH)$ $\Rightarrow$ $(BC) \perp (MH)$
$(BC) \perp (MH)$, $(M_1M) \perp (BC)$ $\Rightarrow$ $\angle M_1MH$ - линейный угол двугранного угла при ребре BC $\Rightarrow$
$\angle M_1MH = 180° - \angle M_1MA = 60°$ $\Rightarrow$ $M_1M = M_1H/\sin 60°$.
$M_1M = M_1M_2 = M_1H/\sin 60°$. Пусть точки M_2 и M не совпадают. Тогда так как $(M_1M) \perp (BC)$, то M_1M - катет прямоугольного треугольника M_1M_2M, а M_1M_2 - его гипотенуза, но $M_1M = M_2M$?!!!!!
Значит точки M_2 и M совпадают $\Rightarrow$ $(M_1M) \parallel (AA_1)$

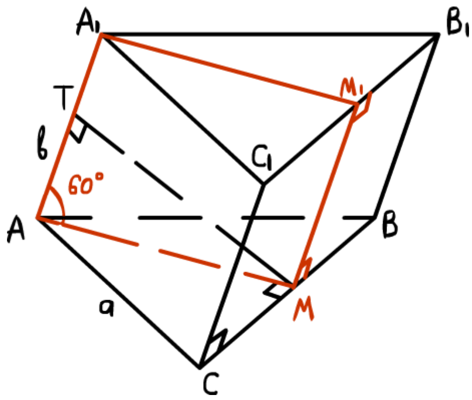
2. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой BC:

Так как из 1го пункта BB_1C_1C - прямоугольник, то расстояние от точки C_1 до прямой BC - отрезок $CC_1 = AA_1 = b$ Ответ: b

3. Найдите $\angle BB_1C_1$:

Так как из 1го пункта BB_1C_1C - прямоугольник, то $\angle BB_1C_1 = 90°$.
Ответ: 90°

4. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC:

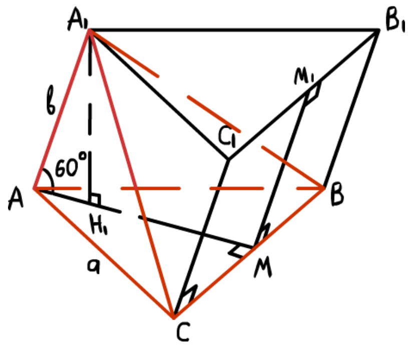


1 способ: “общий перпендикуляр”

1) Доп. построение: $(MT) \perp (AA_1)$
2) Так как из 1го пункта $(BC) \perp (M_1MH)$, то $(MT) \perp (BC)$ ($(MT) \subset (M_1MH)$)
3) $(MT) \perp (AA_1)$, $(MT) \perp (BC)$ $\Rightarrow$ MT - общий перпендикуляр.
   Тогда расстояние между прямыми AA_1 и BC равно MT.
4) AM - высота равностороннего треугольника со стороной a $\Rightarrow$ AM $= \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $\angle MAA_1 = 60^o$ $\Rightarrow$
   $TM = AM \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$

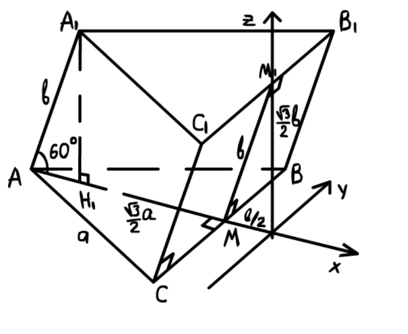
2 способ: “проецирование на плоскость”

1) При проецировании на плоскость (AA_1M_1):
   Прямая (BC) перейдёт в точку M, так как $(BC) \perp (AA_1M_1)$ ($(BC) \perp (M_1MH)$, $(AA_1M_1) \equiv (M_1MH)$).
   Прямая (AA_1) перейдёт в (AA_1), так как $(AA_1) \subset (AA_1M_1)$.
2) Тогда расстояние между прямыми AA_1 и BC равно MT = $\frac{3a}{4}$ (аналогично 1-му способу).



3 способ: “объём тетраэдра”

1) V_{A_1ABC} $= ⅓ \cdot S_{\Delta ABC} \cdot A_1H_1 = ⅙ \cdot AA_1 \cdot BC \cdot \sin(AA_1; BC) \cdot \rho(AA_1;BC)$ (Объем тетраэдра равен 1/6 произведения двух сторон, лежащих на скрещивающихся прямых, умноженного на произведение синуса угла между этими прямыми на расстояние между этими прямыми).
2) $A_1H_1 = \frac{\sqrt{3}b}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ (Площадь равностороннего треугольника), $AA_1 = b$, $BC = a$, $AA_1 \perp BC$ (так как $(BC) \perp (AA_1M_1)$) $\Rightarrow$ $\sin(AA_1; BC) = 1$
3) $\rho(AA_1;BC) = (⅓ \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}b}{2})/(⅙ \cdot a \cdot b \cdot 1) = \frac{3a}{4}$



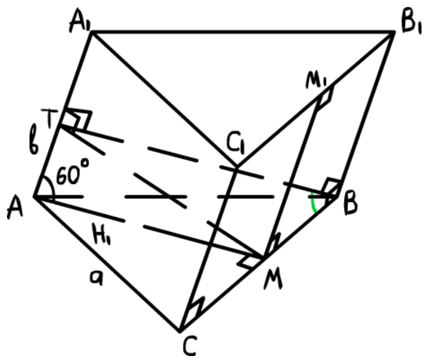
4 способ: “расстояние от точки до плоскости”

1) Так как $(AA_1) || (B_1BC)$, то расстояние между прямыми AA_1 и BC равно расстоянию от точки A_1 до плоскости (B_1BC)
2) Введём систему координат так, как показано на рисунке.
   Запишем координаты точек: $A_1(-\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}b}{2})$; $M(-\frac{b}{2}; 0; 0)$; $M_1(0; 0; \frac{\sqrt{3}b}{2})$; $B(0; \frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}b}{2})$
3) Пусть kx+ly+mz+n=0 - уравнение плоскости (CBB_1)
   Подставим: M: $-\frac{bk}{2} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{bk}{2} \Rightarrow k = \frac{2n}{b}$
   M_1: $\frac{\sqrt{3}bm}{2} + n = 0 \Rightarrow m = -\frac{2n}{\sqrt{3}b}$
   B: $\frac{al}{2} + \frac{\sqrt{3}bm}{2} + n = 0 \Rightarrow \frac{al}{2} - n + n = 0 \Rightarrow l = 0$
   $\frac{2n}{b}x + 0y - \frac{2n}{\sqrt{3}b}z + n = 0 \Rightarrow \frac{2}{b}x + 0y - \frac{2}{\sqrt{3}b}z + 1 = 0$ - уравнение плоскости
4) По формуле расстояние от точки до плоскости равно $\frac{|kx_0+ly_0+mz_0+n|}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}} = \frac{|\frac{2}{b}\cdot(-\frac{\sqrt{3}a}{2})+0\cdot 0-\frac{2}{\sqrt{3}b}\cdot(\frac{\sqrt{3}b}{2})+1|}{\sqrt{(\frac{2}{b})^2+0+(-\frac{2}{\sqrt{3}b})^2}} = \frac{3a}{4}$

Ответ: $\frac{3a}{4}$

5. Найдите двугранный угол при ребре BB_1:

1 способ: “Через линейный угол”

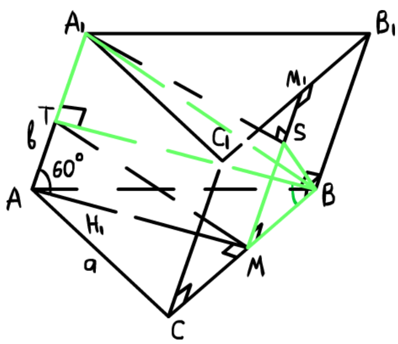


1) Так как из 1го пункта BB_1C_1C - прямоугольник, то $(BC) \perp (BB_1)$
2) Доп.постр: (BT) (точка T - из п.4) 1 способ)
3) $(TM) \perp (AA_1)$, $(AA_1)||(MM_1) \Rightarrow (TM) \perp (MM_1)$; $(MM_1) \perp (BC)$, $(BC) \times (TM) \Rightarrow (TBC) \perp (MM_1)$
4) $(TBC) \perp (MM_1)$, $(MM_1)||(BB_1) \Rightarrow (TBC) \perp (BB_1) \Rightarrow (TB) \perp (BB_1)$
5) $(TB) \perp (BB_1)$, $(BC) \perp (BB_1)$. Тогда $\angle TBC$ - линейный угол двугранного угла при ребре BB_1.
6) $TM = \frac{3a}{4}$ (из п.4)); $MB = \frac{a}{2}$
7) $tg\angle TBC = \frac{TM}{MB} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \angle TBC = arctg\,\frac{3}{2}$

2 способ: “Через Th cos для трёхгранного угла”

1) По Th cos для ТУ: $\cos\angle ABC = \cos\angle B_1BA \cdot \cos\angle B_1BC + \sin\angle B_1BA \cdot \sin\angle B_1BC \cdot \cos\angle AB_1BC$
2) $\cos\angle ABC = \cos 60^\circ = ½$; $\cos\angle B_1BC = \cos 90^0 = 0$; $\sin\angle B_1BC = \sin 90^\circ = 1$
3) $AM = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $TM = \frac{3a}{4}$; по Th Пифагора $AT = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}a}{2})^2 - (\frac{3a}{4})^2} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$; $AB = a$;
$\cos\angle TAB = \frac{AT}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos\angle ABB_1 = \cos(180^\circ - \angle TAB) = -\cos\angle TAB = -\frac{\sqrt{3}}{4}$;
$\sin\angle ABB_1 = \sqrt{1 - (-\frac{\sqrt{3}}{4})^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$
4) $\frac{\sqrt{13}}{4} * \cos\angle AB_1BC = ½ \Rightarrow \cos\angle AB_1BC = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AB_1BC = arccos\,\frac{2}{\sqrt{13}}$ ($= arctg\,\frac{3}{2}$)

3 способ: “Через отношение площадей”

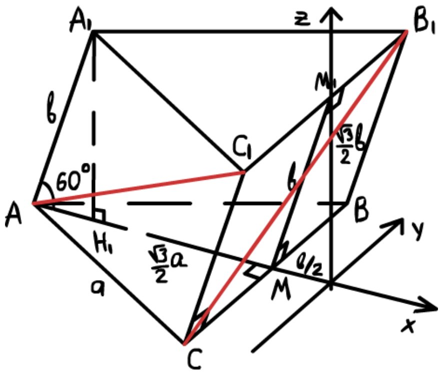


1) По Th об отношении площадей: $\cos\alpha = \frac{S_{проекции}}{S}$
2) Доп.построение: $(A_1S) \perp (MM_1)$; $(MT) \perp (MM_1)$, (MM_1) и (A_1S) в одной плоскости $\Rightarrow (A_1S)||(TM)$
3) $(TM) \perp (MM_1)$ (смотри 1й способ), $(TM) \perp (BC) \Rightarrow (TM) \perp (B_1BC) \Rightarrow (A_1S) \perp (B_1BC)$
4) Тогда проекция треугольника A_1TB на плоскость (B_1BC) - треугольник SMB
5) $S_{\Delta A_1TB} = ½ \cdot A_1T \cdot TB$; $S_{\Delta SMB} = ½ \cdot SM \cdot MB$
6) $A_1T = SM$ (A_1SMB - прямоугольник, так как $(SM)||(AA_1)$, $(A_1S)||(TM)$, $(MT) \perp (MM_1)$)
7) $MB = a/2$; $TB = AB * \sin\angle A_1AB = a \cdot \frac{\sqrt{13}}{4}$ (смотри 2 способ)
8) $\frac{S_{проекции}}{S} = \frac{MB}{TB} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle\alpha = arccos\,\frac{2}{\sqrt{13}}$ ($= arctg\,\frac{3}{2}$)

Ответ: $arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$

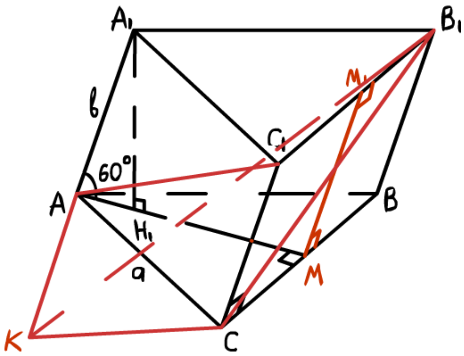
6. Найдите отношение $\frac{b}{a}$:

1 способ: “Через скалярное произведение”



1) Так как $AC_1 \perp CB_1$, то $\vec{AC_1} \cdot \vec{CB_1} = |\vec{AC_1}| \cdot |\vec{CB_1}| \cdot \cos 90° =$ 0
2) С другой стороны $\vec{AC_1} \cdot \vec{CB_1} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
3) Запишим координаты точек:
   $A(-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2};0;0)$; $C_1(0;-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}b}{2})$;
   $C(-\frac{b}{2};-\frac{a}{2};0)$; $B_1(0;\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}b}{2})$
4) Запишем координаты векторов
   $\vec{AC_1}(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}a}{2};-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}b}{2})$; $\vec{CB_1}(\frac{b}{2};a;\frac{\sqrt{3}b}{2})$
5) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = \frac{b^2}{4}+\frac{\sqrt{3}ab}{4}-\frac{a^2}{2}+\frac{3b^2}{4}=0$
   $4b^2+\sqrt{3}ab-2a^2=0 \Rightarrow b=\frac{-\sqrt{3}a\pm\sqrt{35}a}{8}$ т.к b>0, то $b=\frac{-\sqrt{3}a+\sqrt{35}a}{8}$
6) $\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{35}}{8}$

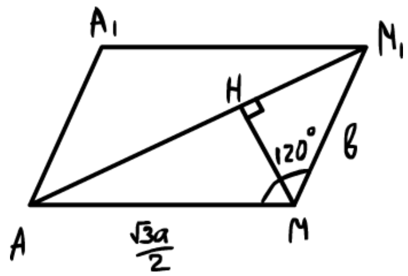
2 способ: “Через Th Пифагора”



1) Доп.построение: $(CK)||(C_1A) \Rightarrow (CK) \perp (CB_1)$
2) по Th Пифагора $CB_1 = \sqrt{BC^2+BB_1{}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$
3) $\Delta KAC = \Delta C_1CA$(по 2м углам и стороне) $\Rightarrow AK = CC_1 = AA_1 = b$;
   $A_1B_1 = a$; $A_1K = 2b$
4) из п.5) 2 способ: $\cos\angle A_1AB = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\angle B_1A_1A = -\frac{\sqrt{3}}{4}$
   аналогично $\Rightarrow \cos\angle C_1A_1A = -\frac{\sqrt{3}}{4} = \cos\angle CAK$
5) По Th cos $CK = \sqrt{a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4}}$; $KB_1 = \sqrt{a^2+4b^2+4ab\frac{\sqrt{3}}{4}}$
6) По Th Пифагора $(KB_1)^2 = (CK)^2+(CB_1)^2$
   $a^2+4b^2+4ab\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4}+a^2+b^2$
7) $4b^2+\sqrt{3}ab-2a^2=0 \Rightarrow b=\frac{-\sqrt{3}a\pm\sqrt{35}a}{8}$ т.к b>0, то $b=\frac{-\sqrt{3}a+\sqrt{35}a}{8}$
8) $\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{35}}{8}$

Ответ: $\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{35}}{8}$

7. Найдите расстояние между AC_1 и BC, выразив его через a и b:



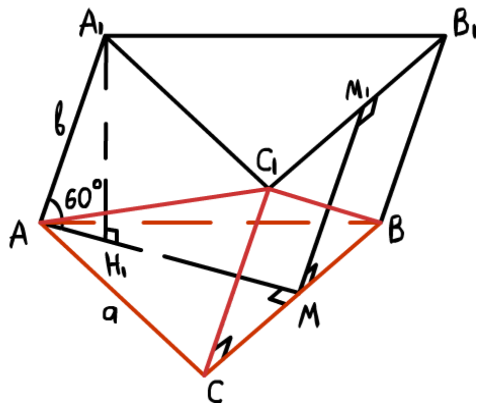
1 способ “Проецирование на плоскость”

1) При проецировании на плоскость (AA_1M_1):
   Прямая (BC) перейдёт в точку M, так как $(BC) \perp (AA_1M_1)$ ($(BC) \perp (M_1MH)$, $(AA_1M_1) \equiv (M_1MH)$).
   Прямая (AC_1) перейдёт в прямую (AM_1), так как $(C_1M_1) \perp (AA_1M_1)$
2) Тогда расстояние между AC_1 и BC равно расстоянию от точки M до прямой AM_1.
   Доп.построение: $(MH) \perp (AM_1)$, MH - искомое расстояние.
3) $\angle AMM_1 = 120^o$. Посчитаем площадь ΔAMM_1 двумя способами:
   $S_{\Delta AMM_1} = ½ \cdot MH \cdot AM_1 = ½ \cdot AM \cdot MM_1 \cdot \sin 120^o$
   по Th cos $AM_1 = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}ab \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ab}$

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ab} \cdot MH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$MH = \frac{3ab}{2\sqrt{3a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}}$$

2 способ “Через объём тетраэдра”



1) $V_{C_1ABC} = ⅓ \cdot S_{\Delta ABC} \cdot C_1H_1 = ⅙ \cdot AC_1 \cdot BC \cdot \sin(AC_1 ; BC) \cdot \rho(AC_1;BC)$
2) $C_1H_1 = A_1H_1$ - расстояние от точки C_1 до плоскости ABC равно расстоянию от точки A_1 до плоскости ABC(т.к. $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$)
   Тогда $V_{C_1ABC} = V_{A_1ABC} = \frac{a^2b}{8}$ (из п.4) 3 способ)
3) Так как $(C_1B_1) \parallel (CB)$, то $\sin(AC_1 ; BC) = \sin(AC_1 ; B_1C_1)$
4) $AC_1 = CK = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\frac{\sqrt{3}}{4}}$ (из п.6) 2 способ); $AB_1 = AC_1$
5) по Th косинусов $\cos\angle AC_1B_1 = \frac{a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4}+a^2-a^2-b^2-2ab\frac{\sqrt{3}}{4}}{2a\sqrt{a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4}}}$
6) $\sin\angle AC_1B_1 = \sin(AC_1 ; B_1C_1) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4(a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4})}} = \sqrt{\frac{3a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}{4a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}}$
7) $\rho(AC_1;BC) = \frac{\frac{a^2b}{8}}{\frac{1}{6}a\sqrt{a^2+b^2+2ab\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{3a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}{4a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}}} = \frac{3ab}{2\sqrt{3a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}}$

Ответ: $= \frac{3ab}{2\sqrt{3a^2+4b^2+2ab\sqrt{3}}}$