Способы нахождения объема тетраэдра на примере одной задачи

Рассмотрим задачу, которая предлагалась на вступительном экзамене одного из ВУЗов.

В прямоугольном параллелепипеде $ADCDA'B'C'D'$ точка E – середина ребра BB'. Найдите объем тетраэдра $EAD'C$, если $AB=2$, $AD=1$, $AA'=\sqrt{3}$.

Эта задача интересна тем, что допускает много способов решения, в основном сводящихся к следующим идеям.

1) **Вычисление объема тетраэдра в виде разности объема параллелепипеда и четырех пирамид**

Заметим, что объем тетраэдра $EAD'C$ есть разность объемов данного параллелепипеда и четырех пирамид: $ADCD'$, $ABCE$, $AA'D'B'E$ и $CC'D'B'E$. Вычислим их объемы (рис.1):

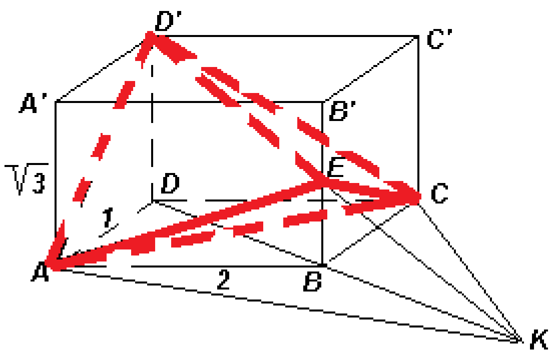

рис.1

1) $V_{ABCDA'B'C'D'}=AB\cdot AD\cdot AA'=2\sqrt{3}$; 2) $V_{ACDD'}=\dfrac{1}{6}DC\cdot AD\cdot DD'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $V_{ABCE}=\dfrac{1}{6}AB\cdot BC\cdot CE=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; 4) $V_{AA'B'D'E}=\dfrac{1}{3}S_{AA'B'E}\cdot D'A'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $V_{CC'B'D'E}=\dfrac{1}{3}S_{B'C'CE}\cdot D'C'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$V_{EAD'C}=2\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Думается, что к этому способу прибегло большинство абитуриентов.

Следующая идея подразумевает:

2) Использование дополнительных построений, позволяющих выразить искомый объем тетраэдра в виде разности объемов пирамид.

Снова обратимся к рисунку 1. Пусть прямая $D^{'}E$ пересекается с прямой DB в точке K, тогда

$$V_{EAD^{'}C} = V_{KAD^{'}C} - V_{EACK} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACK} \cdot DD^{'} - \frac{1}{3}S_{\triangle ACK} \cdot EB = \frac{1}{6}S_{\triangle ACK} \cdot AA^{'}$$

Найдем площадь треугольника ACK. Пусть O – точка пересечения AC и BD, тогда $S_{\Delta ACK} = 2S_{\Delta AOK} = OK \cdot AH$, где AH – перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональ BD (рис.2).

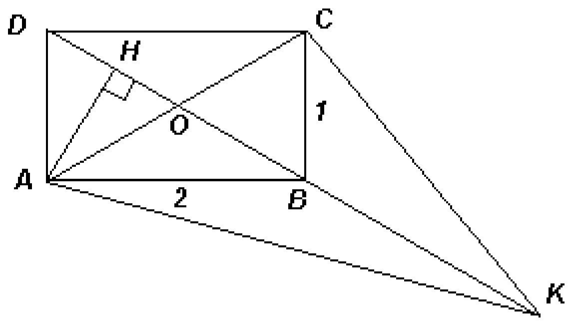

рис.2

Так как $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5}$, $AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $OK = \frac{3}{2}BD = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, то

$S_{\triangle ACK} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 3$. Следовательно, $V_{EAD^{'}C} = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Достраивание до фигуры, содержащей фигуру с искомым объёмом, довольно удачно обходит монотонные разбиения на части. Кстати, также поступают, когда в планиметрии находят площадь. Например, кода у трапеции два острых угла в сумме дают 90^0, известны оба основания , а надо найти площадь. Тогда можно достроить до прямоугольного треугольника и поступить аналогично разобранному выше способу. Известно, что если у треугольников одинаковое основание , то их площади относятся как высоты треугольников , проведенных к этому основанию(рис.3).

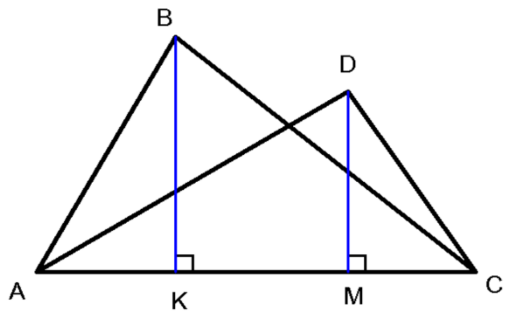

рис. 3

Похожая ситуация и существует и для тетраэдра. Назовем следующий способ так.

3) **Использование равновеликости пространственных фигур за счет параллельности**

Заметим, что объем тетраэдра не изменится, если одну из его вершин переместить параллельно противолежащей грани.

Через точку E проведем прямую, параллельную AD' ', которая пересечет CC' в точке F (рис. 4).

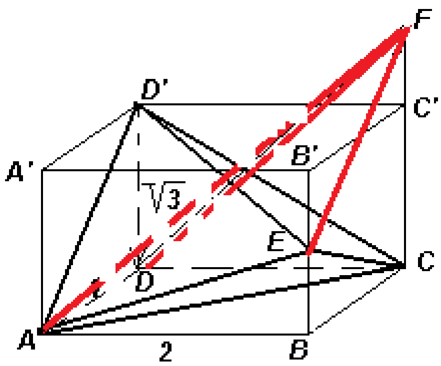

рис.4

Тогда $(EF)\parallel(AD'C)$, поэтому $V_{EAD'C}=V_{FAD'C}=V_{FADC}$, так как $(DD')\parallel(AFC)$.

$$V_{FADC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot FC=\frac{1}{6}AD\cdot DC\cdot FC=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Похоже, это самый быстрый способ.

Достаточно быстро можно придти к результату, если подменить геометрию алгеброй, т.е. использовать метод координат.

4) **Введение системы координат и использование формулы расстояния от точки до плоскости**

Введем систему координат, как показано на рис.5, принимая во внимание тот факт, что уравнение плоскости $AD'C$ можно легче найти, используя уравнение плоскости, отсекающей от осей координат отрезки $a.b$ и c: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Тогда задача сведется к нахождению расстояния от точки E до плоскости $AD'C$ по формуле $\rho\left(E;\left(AD'C\right)\right)=\frac{\left|\alpha x_E+\beta y_E+\gamma z_E+\lambda\right|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$, где

$\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0$ - уравнение плоскости $AD'C$

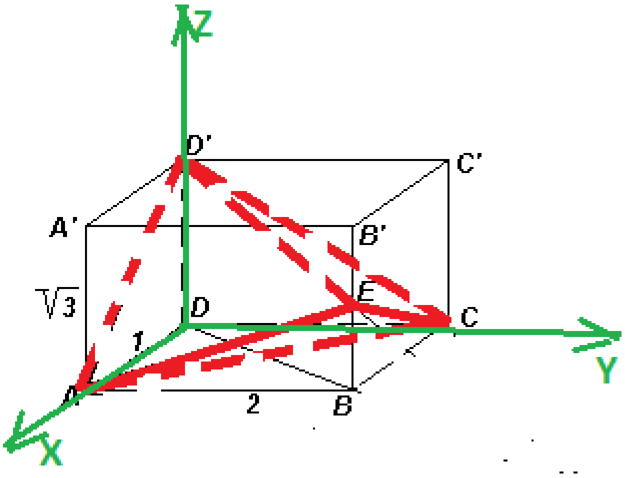

рис.5

Уравнение $\left(AD'C\right)$ в отрезках: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. Общее уравнение плоскости

$AD'C: 2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+2z-2\sqrt{3}=0$. Координаты точки $E: E\left(1;2;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Высота тетраэдра : $\rho\left(E;\left(AD'C\right)\right)=\frac{\left|2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12+3+4}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Далее

остается только найти площадь треугольника $AD'C$.

После применения метода координат соблазнительно использовать для нахождения объема тетраэдра смешанное произведение векторов:

5) Представление объема в виде смешанного произведения векторов

Если найти координаты векторов $\overrightarrow{ED'}\left(x_1,y_1,z_1\right),\overrightarrow{EA}\left(x_2,y_2,z_2\right)$ и $\overrightarrow{EC}\left(x_3,y_3,z_3\right)$ а затем подсчитать их смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{ED'}\times\overrightarrow{EA}\right)\cdot\overrightarrow{EC}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$, то объём тетраэдра будет равен $\frac{1}{6}$ объема куба, построенного на этих векторах, т.е. $V_{EAD'C}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{ED'}\times\overrightarrow{EA}\right)\cdot\overrightarrow{EC}\right|$.

Но этот материал обычно выходит за рамки школьной программы.

Ну и самое неожиданное: метод проектирования.

6) **Проецирование пирамиды на плоскость с целью нахождения её высоты**.

Сделаем дополнительное построение в плоскости основания параллелепипеда. Проведем луч с вершиной D параллельно диагонали AC и построим отрезок BN так, что $[BN]$ будет перпендикулярен этому лучу (рис.6).

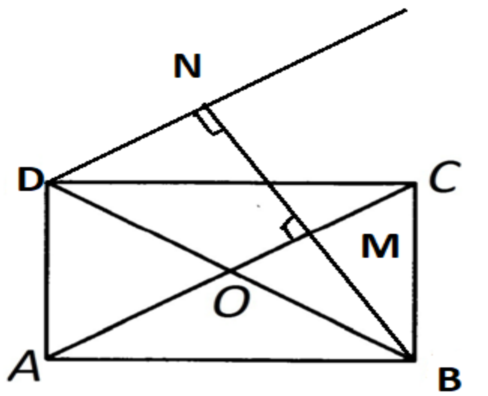

рис.6

Тогда в силу параллельности $[BM]\perp[AC]$.

1) $BM=\frac{BA\cdot BC}{AC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Так как $OB=OD$ и $[DN)\square[OM]$, то по теореме Фалеса $BM=MN=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $NB=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

2) Рассмотрим плоскость $\alpha:\alpha\perp(AC),\alpha\supset\left(BB'\right)$(такая всегда существует). Прямые BN, BB' содержатся в ней, прямая BB' перпендикулярна плоскости ABC. По признаку перпендикулярности плоскостей $\alpha\perp(ABC)$.

Пусть $\alpha\cap\left(A'B'C'\right)=\left(B'N'\right)$. Тогда $\left(D'N'\right)\perp\left(B'N'\right)$ и $(BN)\square\left(B'N'\right)$.

Понятно, что $(DN)\perp\alpha$ $\left((DN)\square(AC)\right)$, а значит $\left(D'N'\right)\perp\alpha$.

3) Спроецируем (ортогонально) на плоскость α тетраэдр, объем которого мы ищем (рис.7).

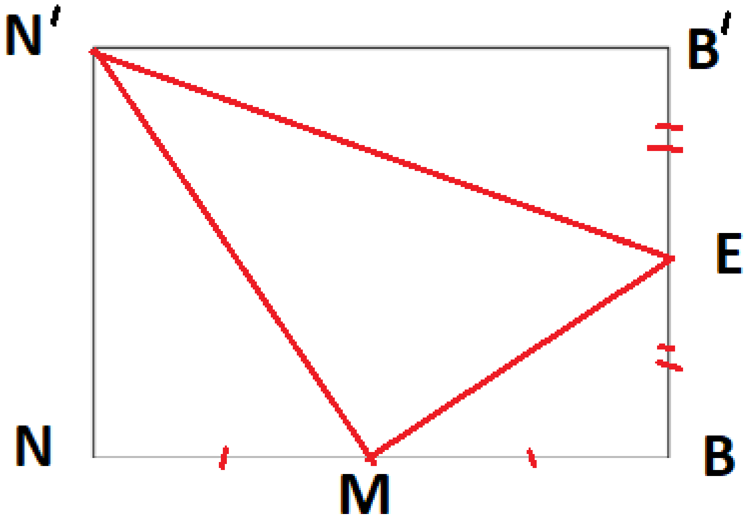

рис.7

Прямая AC перейдет в точку M, точка D в точку N, точка D' в точку N', а E перейдет сама в себя. Следовательно, расстояние от точки E до плоскости $AD'C$,будет равно расстоянию от точки E до прямой $N'M$: $\rho\left(E;\left(AD'C\right)\right)=\rho\left(E;\left(N'M\right)\right)$.

Обозначим площадь прямоугольника $NN'B'B$ равную S.

Тогда $S_{NMN'}=\dfrac{S}{4}=S_{N'B'E}$. Далее, $S_{MBE}=\dfrac{8}{5}$, а

$$S_{MN'E}=\frac{3S}{8}=\frac{3}{8}NB\cdot NN'=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}N'M\cdot\rho\left(E;\left(N'M\right)\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{5}}\cdot\rho\left(E;\left(N'M\right)\right)$$

Отсюда $\rho\left(E;\left(N'M\right)\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$, а это высота тетраэдра $EAD'C$.

Осталось найти площадь треугольника $AD'C$. По теореме косинусов найдем $\cos\angle A=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, затем $\sin\angle A=\dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$. Окончательно получим, что $S_{AD'C}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, а

$$V_{EAD'C}=\frac{1}{3}S_{AD'C}\cdot\rho\left(E;\left(N'M\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Конечно, данный способ решения не является наиболее рациональным, но он раскрывает суть метода ортогонального проектирования, а именно, возможность свести стереометрическую задачу к задаче планиметрической.

Возможно, представленные способы решения, не являются исчерпывающими, но при прохождении темы «Объёмы» полезно осветить многообразии подходов на примере данной задачи, ибо ничто так не украшает преподавание геометрии, как возможность посмотреть на объект с различных точек зрения.