Секущая плоскость и отношение объемов в пирамиде

Рассмотрим задачу, предлагавшуюся абитуриентам на математико-механическом факультете СПБГУ. Данная задача устанавливает связь между объемами частей, на которые пирамиду делит секущая плоскость, с отношением отрезков, на которые данная секущая плоскость разбивает боковые ребра.

Задача 1. Плоскость, проходящая через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, делит её объем пополам. В каком отношении плоскость делит боковые ребра пирамиды?

Решение. Ясно, что $(MN)\parallel(AB)$, т.к. секущая плоскость пересекает плоскость CAB по прямой AB, которая параллельна CD - линии пересечения плоскостей ABC и SCD.

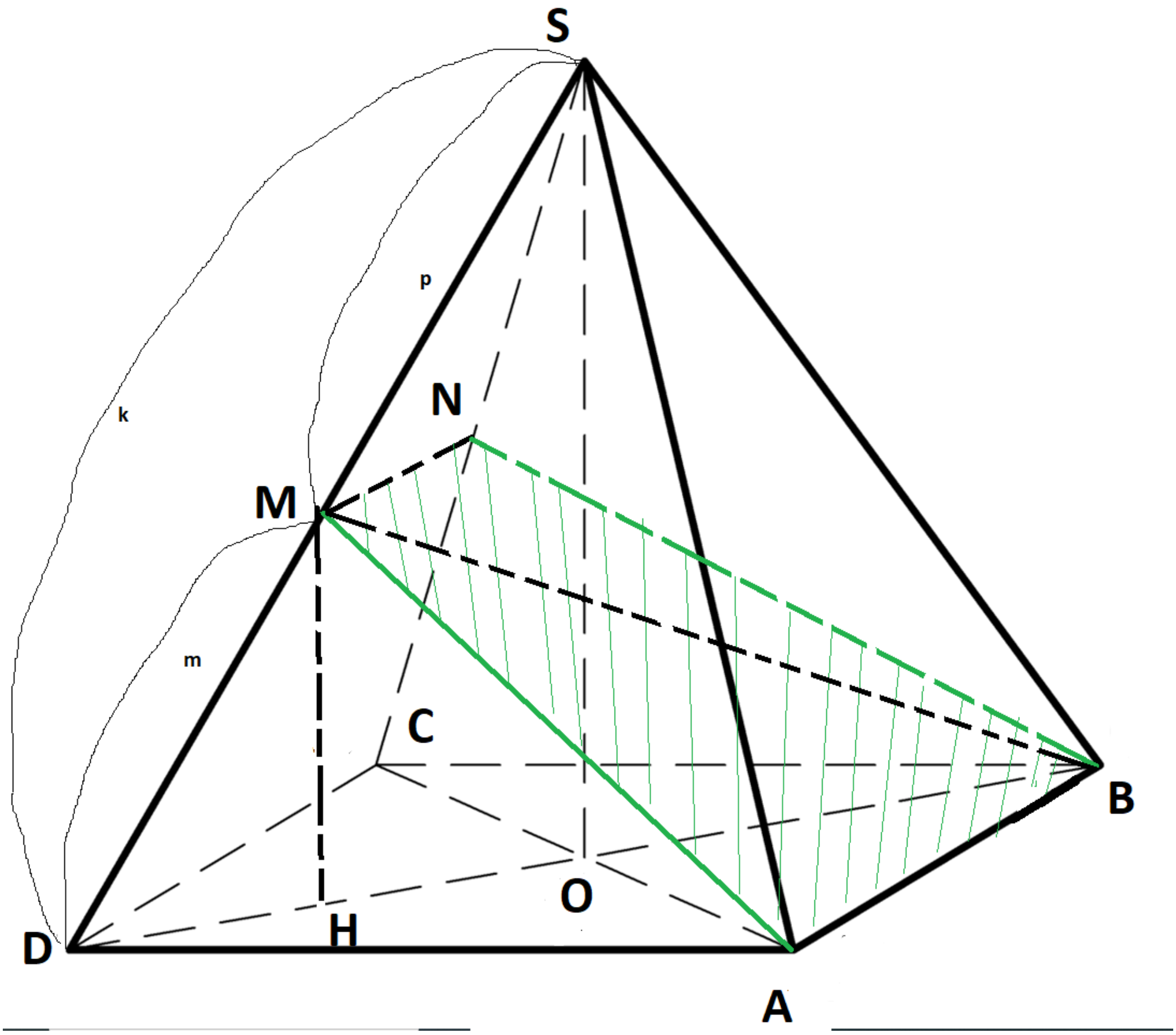

Рис.1

Пусть $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$, где $(SO) \perp (ABC)$, $O -$ центр основания (пирамида правильная). Обозначим $V_{SABCD} = 2V$ и $\frac{DM}{SD} = \frac{m}{k}$. Тогда $V_{SABD} = V$. Если SO - высота пирамиды $SABCD$ (рис.1), то $MH -$ высота пирамиды $MABD$, где $(MH) \parallel (SO)$. Следовательно, $\frac{MH}{SO} = \frac{m}{k}$ и $V_{MABD} = \frac{m}{k} \cdot V$. По свойству площадей (аксиоме) $V_{SAMB} = V_{SABD} - V_{MABD} = V - \frac{m}{k} \cdot V = V\left(1 - \frac{m}{k}\right)$.

Само сечение плоскостью представляет собой трапецию, т.к. $(MN) \parallel (AB)$, а AM и BN не параллельны. Отношение площадей треугольников MAB и BMN равно отношению их оснований: $\frac{AB}{MN}$, т.к. у них общая высота. Из того, что $\frac{DM}{SD} = \frac{m}{k}$, получим $\frac{MN}{AB} = \frac{k-m}{k}$. Тогда отношение объёмов пирамид $SMBN$ и $SMBA$ с одинаковой высотой, опущенной из вершины S, равно отношению площадей: $\frac{S_{MBN}}{S_{MBA}} = \left(\frac{k-m}{k}\right)^2$ и $V_{SMNB} = \left(\frac{k-m}{k}\right)^2 \cdot V$.

В итоге, $V_{SAMNB} = V_{SAMB} + V_{SMNB} = V\left(1 - \frac{m}{k} + \left(\frac{k-m}{k}\right)^2\right)$. С другой стороны, $V_{SAMNB} = V$ из условия. Имеем уравнение: $1 - \frac{m}{k} + \left(\frac{k-m}{k}\right)^2 = 1$. Из которого получаем, что $\frac{m}{k} = \left(\frac{k-m}{k}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{k}\right)^2 - 3 \cdot \frac{m}{k} + 1 = 0$. Откуда $\frac{m}{k} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Тогда $\frac{SM}{SD} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т.е. верхняя часть бокового ребра составляет $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ его длины, искомое отношение равно $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$, считая от вершины. Конечно, решение непростое, но существует менее затратный способ, основанный на применении следующей теоремы.

Теорема: если один из трехгранных углов одной из двух треугольных пирамид равен одному из трехгранных углов другой пирамиды, то объёмы этих пирамид относятся, как произведение ребер, образующих трехгранные углы.

Следует заметить, что два трехгранных угла равны, если у них равны:

1) соответственные плоские углы;
2) два плоских угла и заключенный между ними двугранный;
3) плоский угол и прилежащие к нему двугранные;
4) соответственные двугранные углы.

Признаки 1,2,3 скопированы с признаков равенства треугольников; признак 4 аналогии в планиметрии не имеет. Эту аналогию тетраэдра с треугольником, где в качестве сторон треугольника выступают плоские углы при вершине тетраэдра, а в качестве углов треугольника – двугранные углы при ребрах тетраэдра с этой общей вершиной, еще раз подчеркивает упомянутая выше теорема. Ибо она является аналогом теоремы об отношении площадей двух треугольников, имеющих общий угол. Докажем эту теорему.

Доказательство:

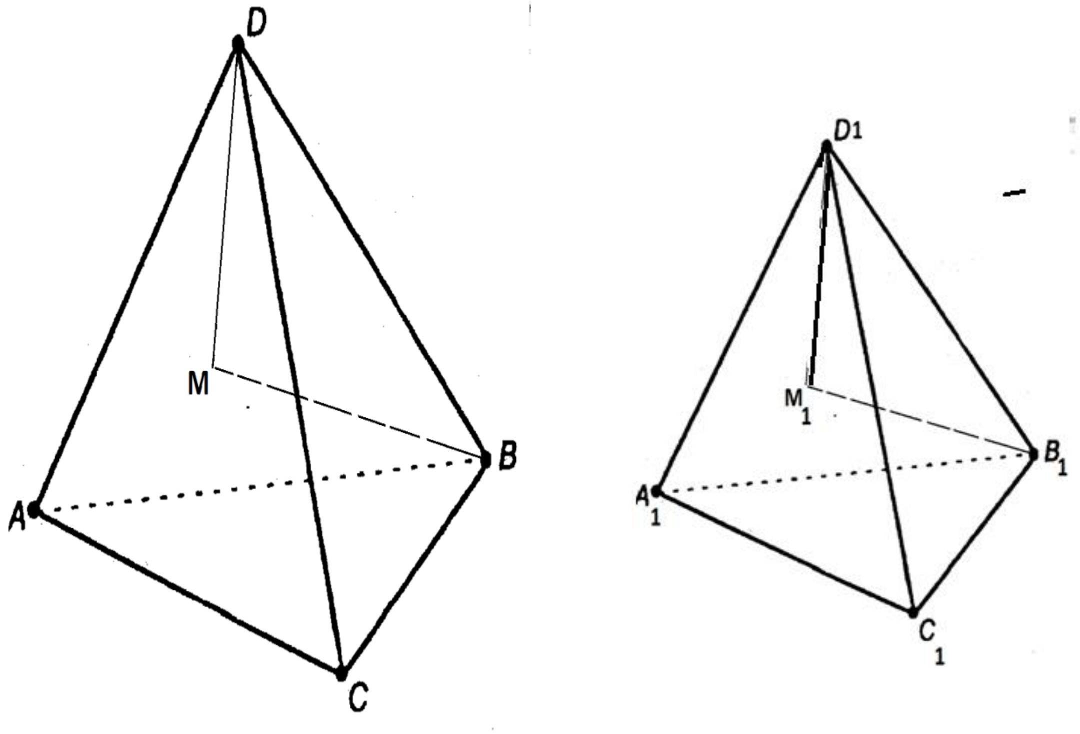

Рис.2

Пусть в треугольных пирамидах равны трехгранные углы при вершинах D и D_1. Опустим перпендикуляры BM и B_1M_1 на противоположные грани. Тогда DM и D_1M_1 - проекции соответственно ребер BD и B_1D_1 на эти грани. Угол наклона бокового ребра DB к плоскости DAC такой же, как и для ребра D_1B_1 и плоскости $D_1A_1C_1$. На рис.2 BM и B_1M_1 – высоты пирамид. Тогда $V_{DABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin\varphi\cdot MB,\ MB=DB\sin\alpha$, где $\varphi=\angle ADC,\ \alpha=\angle BDM$. Т.е. $V_{DABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin\varphi\cdot DB\sin\alpha$. Также получим, что $V_{D_1A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_1D_1\cdot D_1C_1\sin\varphi\cdot M_1B_1,\ M_1B_1=D_1B_1\sin\alpha$, или $V_{D_1A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_1D_1\cdot D_1C_1\sin\varphi\cdot D_1B_1\sin\alpha$. Следовательно,

$$\frac{V_{DABC}}{V_{D_1A_1B_1C_1}}=\frac{DA\cdot DB\cdot DC}{D_1A_1\cdot D_1B_1\cdot D_1C_1}.$$

Применим эту теорему для исходной задачи. Пусть $\frac{SM}{SD}=\frac{p}{k}$. Тогда по теореме $\frac{V_{SMBA}}{V_{SDAB}}=\frac{SM\cdot SA\cdot SB}{SD\cdot SA\cdot SB}=\frac{p}{k}$; $\frac{V_{SMNB}}{V_{SCDB}}=\frac{SM\cdot SN\cdot SB}{SD\cdot SC\cdot SB}=\frac{p^2}{k^2}$. Также $V_{SMNB}+V_{SMBA}=V$ и $V_{SCDB}=V_{SABD}=V$

В итоге получили равенства, $\begin{cases}\dfrac{V_{SBMBA}}{V}=\dfrac{p}{k},\\ \dfrac{V_{SMNB}}{V}=\left(\dfrac{p}{k}\right)^2,\\ V_{SMNB}+V_{SMBA}=V\end{cases}$ из которых получаем уравнение $V\left(\frac{p}{k}+\frac{p^2}{k^2}\right)=V\Leftrightarrow\frac{p^2}{k^2}+\frac{p}{k}-1=0$, откуда $\frac{p}{k}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Разумеется, должен последовать вопрос: «Верно ли аналогичное утверждение для четырехугольных пирамид?». Рассмотрим четырехугольную пирамиду с вершиной $PABCD$ и проведем сечение $KLMN$ параллельно основанию, где K, L, M и N - середины боковых ребёр

PB, PA, PD и PC соответственно (рис.3).

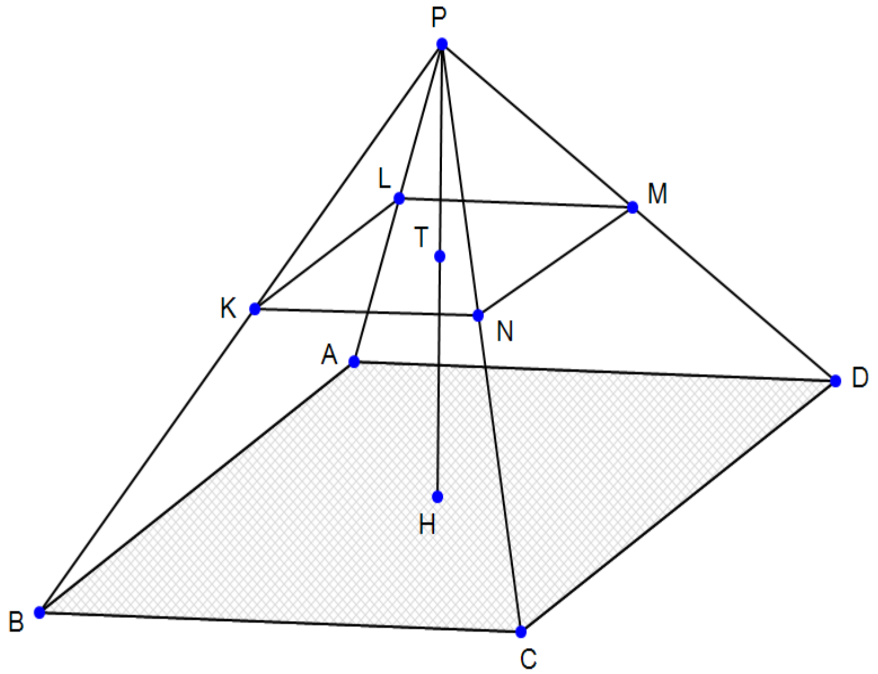

рис.3

Ясно, что $\frac{S_{KLMN}}{S_{BACD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Отношение высот пирамид $PKLMN$ и $PBADC$

$PT : PH = 1:2$. Тогда $\frac{V_{PKLMN}}{V_{PBADC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{KLMN} \cdot PT}{\frac{1}{3}S_{BADC} \cdot PH} = \frac{1}{8}$. С другой стороны, по

нашему предположению это должно равняться $\frac{1}{16}$, т.к.

$\frac{V_{PKLMN}}{V_{PBADC}} = \frac{PK \cdot PL \cdot PM \cdot PN}{2PK \cdot 2PL \cdot 2PM \cdot 2PN} = \frac{1}{16}$. Как видим, произведение коэффициента подобия высот и его квадрата (отношение площадей оснований) «не успевает догнать» произведение коэффициентов подобия четырех боковых ребер. Понятно, что утверждение неверно для любого такого сечения, параллельного основанию. Получили, что обобщение теоремы на многогранные углы, не являющиеся трехгранными, не работает.

Рассмотрим ещё одну задачу, в которой непросто будет обойтись без нашей теоремы.

Задача 2. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ABD, выходящие из вершины A, в отношениях $1:2, 1:1$ и $1:2$ (считая от точки A). Найдите отношение объёмов частей, на которые эта плоскость делит данную пирамиду.

Решение. Пусть $ABCD$ - данный тетраэдр, AK, AM, AN - медианы его граней ABC, ACD и $ABD,$ выходящие из вершины A, плоскость PQR пересекает эти медианы в точках E, F и G соответственно (см. рис.4)

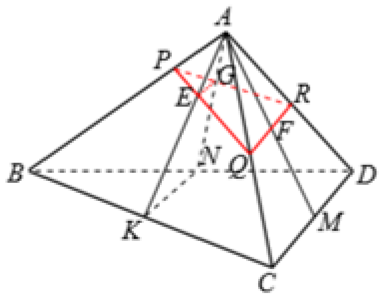

рис.4

Так как $AE:EK = AG:GN,$ то $(EG)\parallel(KN)$. В свою очередь, $(CD)\parallel(KN)$. Значит, $(EG)\parallel(CD)$ и, следовательно, $(EG)\parallel(ACD)$. Таким образом, плоскость PQR, содержащая прямую EG, пересекает плоскость ACD по прямой QR, параллельной EG, а, значит, $(QR)\parallel(CD)$. Поскольку при этом QR проходит через середину F медианы AM, точки Q и R - середины отрезков AC и AD.

Пусть медиана CT треугольника ABC пересекает медиану AK в точке S, а сторону AB в точке T (рис.5).

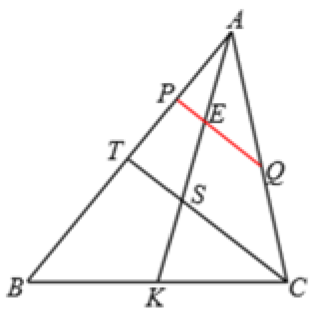

рис.5

Тогда $AS = \frac{2}{3}AK$, и так как $AE = \frac{1}{3}AK$, то точка E - середина отрезка AS.

Поскольку точка Q - середина $[AC]$, точка P - середина $[AT]$ и

$AP : AB = 1:4$.

Таким образом, ребра данного тетраэдра делятся плоскостью PQR в отношении $1:4, 1:2$ и $1:2$, следовательно, $\frac{V_{APQR}}{V_{ABCD}} = \frac{AP \cdot AQ \cdot AR}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16}$.

Значит, $\frac{V_{APQR}}{V_{BCDPQR}} = \frac{1}{15}$.

Как видим из решения этой задачи использование упомянутой теоремы – наиболее рациональный путь к решению, нежели поэтапное разбиение фигуры на составные части.

В заключении предлагается задача для закрепления материала статьи.

Задача 3. На боковых ребрах EA, EB и EC правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ расположены точки M, N и K соответственно, причем $EM : EA = 1:2, EN : EB = 2:3, EK : EC = 1:3$. В каком отношении плоскость MNK делит объём пирамиды?

Указание: Можно воспользоваться дважды теоремой Менелая в треугольниках EAC и EBD для нахождения отношения $\frac{EP}{PD}$.

Ответ: $5:58$.