## ПРИМЕР «СКВОЗНОЙ» ЗАДАЧИ

Рассмотрим довольно известную задачу на доказательство перпендикулярности прямой и плоскости.

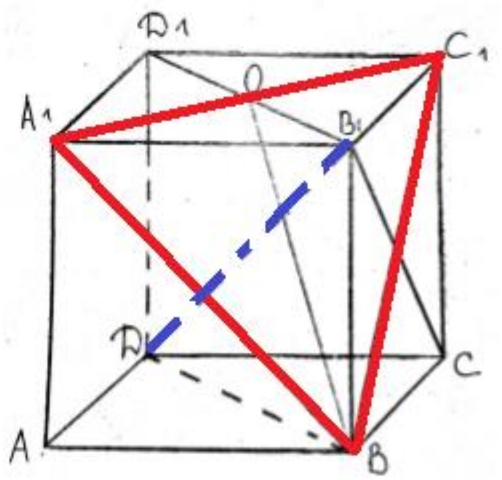


**Рис.1**

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб.

Доказать: $(DB_1) \perp (A_1C_1B)$. Рассмотрим первый способ решения, который можно использовать сразу после разбора доказательства перпендикулярности прямой и плоскости.

**Способ 1. (Поиск двух пересекающихся прямых, перпендикулярных плоскости)**

В силу того, что $(A_1C_1) \perp (D_1B_1)$ и $(A_1C_1) \perp (BB_1)$, т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем, что $(A_1C_1) \perp (BB_1D_1)$, т.е. $(A_1C_1) \perp (DB_1)$.

Найдем другую прямую, перпендикулярную прямой $DB_1$. Сделаем выносной рисунок - прямоугольник $D_1B_1BD$. Заметим, что $(A_1C_1B) \cap (D_1B_1B) = (BO)$, т.к. прямые $A_1C_1$ и $D_1B_1$ пересекаются в точке $O$, а точка $B$ - общая точка этих плоскостей.

Введем систему координат, как показано на рис.2.

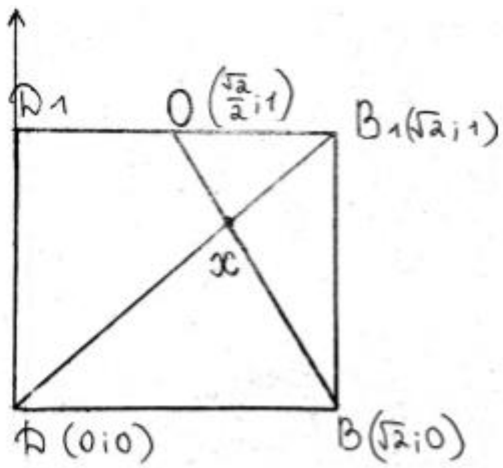


**Рис.2**

Положив, что сторона куба равна 1, получим, $D(0;0), B(\sqrt{2};0), B_1(\sqrt{2};1), O\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$. В результате получаем координаты следующих векторов: $\vec{DB_1}(\sqrt{2};1)$ и $\vec{BO}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$. Их скалярное произведение равно нулю: $\vec{DB_1}\cdot\vec{BO} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}+1\cdot 1 = 0$. Значит, $(OB)\perp(DB_1)$.

Перпендикулярность этих прямых можно доказать, рассматривая подобие треугольников $OXB_1$ и $BXD$ с коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$. Тогда $DB_1 = 3B_1X$; $XB_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Кроме того, имеем отношения: $\frac{OX}{XB} = \frac{B_1X}{XD} = \frac{OB_1}{DB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Рассмотрим еще одну пару подобных треугольников $OXB_1$ и $DD_1B_1$. Эти треугольники подобны по общему острому углу $D_1B_1D$ и в силу пары пропорциональных сторон, содержащих этот угол: $\frac{OB_1}{DB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{XB_1}{D_1B_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда $(OB)\perp(DB_1)$, т.к. $\angle OXB_1 = \angle DD_1B_1 = 90^0$.

Можно также было воспользоваться обратной теоремой Пифагора . Легко подсчитать, воспользовавшись подобием треугольников $OXB_1$ и $BXD$ с коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$, что $OX = \frac{1}{\sqrt{6}}, OB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, XB_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , и убедиться в том, что $OX^2 + XB_1^2 = OB_1^2$.

Конечно, применение скалярного произведения гораздо быстрее приводит к результату, но с точки зрения повторения планиметрии при изучении стереометрии в десятом классе стоит доказать, что $(OB) \perp (DB_1)$, несколькими способами.

Даллее, по плану изучения стереометрии, идет теорема о трех перпендикулярах. Рассматриваемую задачу можно доказать, используя эту теорему. Тем более, что здесь она «высвечивается» с весьма неожиданной стороны.

**Способ 2. (Применение теоремы о трех перпендикулярах)**

Нетрудно заметить (рис.1), что $(DC) \perp (BB_1C_1)$( по свойству куба). А это значит, что $B_1C$ - проекция $DB_1$ на плоскость $BB_1C_1$. Также в силу того, что $(B_1C) \perp (BC_1)$( $B_1C_1CB$ - квадрат), получаем , что проекция $DB_1$ перпендикулярна прямой $BC_1$. По теореме о трех перпендикулярах наклонная $DB_1$ перпендикулярна прямой $BC_1$. Аналогично доказывается , что $(DB_1) \perp (A_1B)$. И снова мы обеспечили выход на признак перпендикулярности прямой и плоскости.

При изучении темы «Угол между скрещивающимися прямыми» часто возникает необходимость пристроить к данному многограннику такой же, с целью параллельного переноса одной из скрещивающихся прямых , так, чтобы она пересекалась со второй. Поступим также и в нашем случае .

**Способ 3. (Дополнение куба)**

Дополним куб до параллелепипеда, как показано на рис.3, достроив такой же куб.

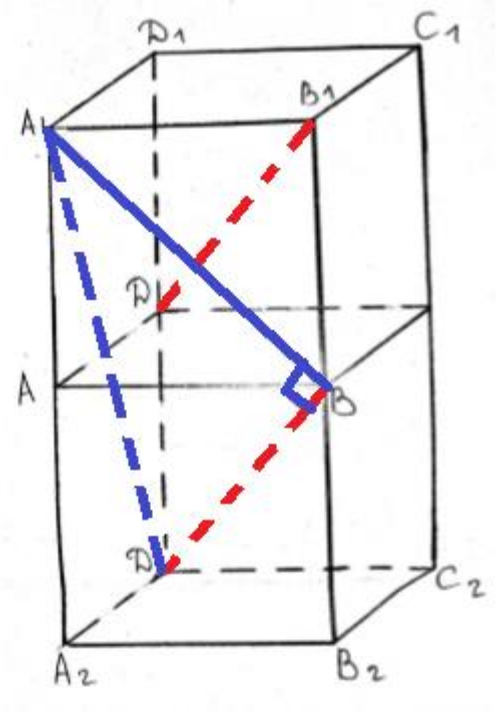


**рис.3**

Тогда $(D_2B)\parallel(DB_1)$. Рассмотрим треугольник $A_1D_2B$:

$A_1D_2=\sqrt{A_2A_1^2+A_2D_2^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}, A_1B=\sqrt{2}, D_2B=\sqrt{3}$ как диагональ куба с ребром 1. Заметим, что $A_1D_2^2=A_1B^2+D_2B^2$. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник $BA_1D_2$ прямоугольный и $(A_1B)\perp(BD_2)$ и в силу параллельности $(A_1B)\perp(B_1D)$. Аналогично получим, что $(DB_1)\perp(BC_1)$.И, снова по признаку, утверждение в задаче доказано.

Существует мнение о том, что методом координат в пространстве нужно пользоваться, начиная уже с первых уроков стереометрии, тем более, что в нем ничего принципиально нового, по сравнению с планиметрией, не добавляется. А доказательство некоторых фактов можно отложить на время, когда запланирована тема «Векторы и координаты в пространстве». Тем самым появляется сразу мощный метод в геометрии, который знаком с 9 класса.

**Способ 4. (Метод координат)**

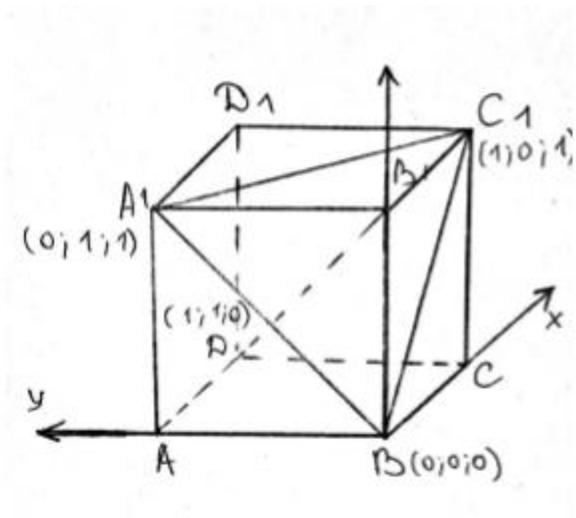


**рис.4**

Введем систему координат, как показано на рис.4. Нетрудно будет получить уравнение плоскости $(A_1C_1B)$. Запишем координаты точек, полагая, что куб – единичный. $A(0;1;1), B(0;0;0), C_1(1;0;1)$. Заметим, что выбор начала координат в точке $B$ наиболее рационален, с точки зрения вычислений: все координаты «используемой точки» равны нулю. Тогда , исходя из общего уравнения плоскости : $ax+by+cz+d=0$ и подставляя значения координат, получим систему $\begin{cases} A_1 : b+c+d=0, \\ C_1 : a+c+d=0, \\ B : d=0 \end{cases}$. Или $\begin{cases} b=a, \\ a=-c, \\ d=0 \end{cases}$. В том, что $d=0$, нет ничего удивительного, ведь плоскость проходит через начало координат. Получили, что $-cx-cy+cz=0$. Поделим обе части равенства на $-c\neq 0: x+y-z=0$.

Откуда координаты вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости $A_1C_1B$ равны $(1;1;-1)$

Осталось только убедиться, что вектор $\overrightarrow{DB_1}$ коллинеарен вектору нормали $\vec{n}$.

А это так, потому что $\overrightarrow{DB_1}(-1;-1;1)$ и $\overrightarrow{DB_1}=-\vec{n}$.

Как и в планиметрии, в стереометрии можно изучать свойства фигур, из которых составлена данная фигура. Во время прохождения темы «Геометрическре место точек в пространстве» в разделе «Расстояния и углы» можно вновь обратиться к данной задаче, а именно когда расматривается геометрическое множество точек пространства, равноудаленных от вершин вписанного многоугольника. Как известно, это перпендикуляр к плоскости многоугольника, проходящий через центр его описанной окружности. При изучении частных видов пирамид, рассматривая пирамиды, у которых боковые ребра равны между собой, можно привлечь внимание учащихся к тому факту, что высота пирамиды в этом случае также проецируется в центр описанной около основания окружности.

**Способ 5 . (Тетраэдр в кубе)**

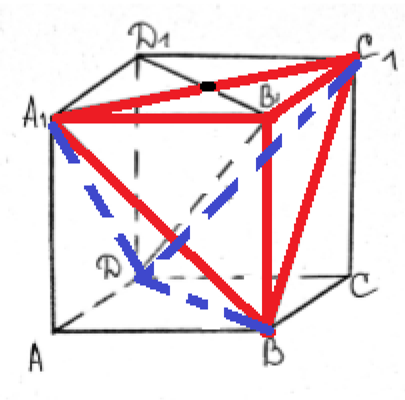


**рис.5**

Рассмотрим тетраэдр с основанием $A_1C_1B$ и вершиной $B_1: B_1A_1C_1B$. У него все боковые ребра $A_1B_1, B_1C_1, BB_1$ равны. Это значит, что высота из вершины $B_1$ проецируется в центр описанной окружности около правильного треугольника $A_1C_1B$. Аналогичные рассуждения можно провести для тетраэдра с тем же основанием , вершиной $D$ и равными боковыми ребрами: $DA_1, DC_1, DB$ .Высота из вершины $D$ «упадет» в центр описанной окружности около треугольника $A_1C_1B$. Но в силу того, что центр описанной окружности у треугольника единственный, высоты этих тетраэдров проходят через одну точку, которая является этим центром. Значит, они лежат на одной прямой $DB_1$. Таким образом $(D_1B) \perp (A_1C_1B)$.

В разделе «Объёмы» приобретение навыков вычисления объёма многогранника путем разбиения его на многогранники, не имеющие общих внутренних точек (свойство аддитивности), является приоритетным, как и освоение метода объёмов. Данная задача является хорошим сочетанием для заявленных целей.

**Способ 6 . (Метод объёмов)**

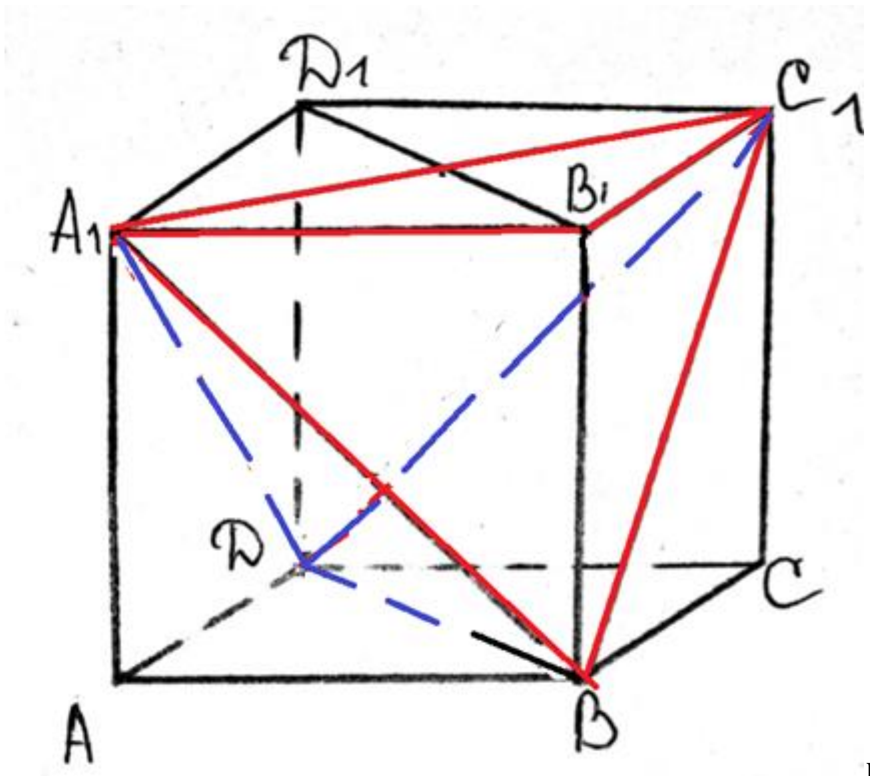


**рис.6**

Обозначим объём куба $V\left(DA_1C_1B\right)=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$: $V$ , а площадь его грани $ABCD$ : $S$ . Ясно, что $V=S=1$. Рассмотрим пирамиду $C_1CDB$, где $C_1-$вершина. Тогда $V\left(C_1CDB\right)=\frac{1}{3}\cdot S\left(DBC\right)\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{2}\cdot 1=\frac{S}{6}=\frac{V}{6}=\frac{1}{6}$. Пирамида $C_1CDB$ равна пирамиде $B_1BA_1C_1$. Следовательно, их объёмы равны. С другой стороны: $V\left(B_1BA_1C_1\right)=\frac{1}{3}\cdot S\left(BA_1C_1\right)\cdot h_1$, где $h_1$ - высота пирамиды $B_1BA_1C_1$ и $h_1\perp\left(BA_1C_1\right)$. Итак, $V\left(B_1BA_1C_1\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot h_1=\frac{1}{6}$. Отсюда $h_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Далее, $V\left(B_1BA_1C_1\right)=V\left(C_1DBC\right)=V\left(A_1ADB\right)=V\left(DA_1C_1D_1\right)=\frac{1}{6}$, т.к. это равные пирамиды. Тогда по свойству аддитивности объёма для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ получим: $V=V\left(B_1BA_1C_1\right)+V\left(C_1DBC\right)+V\left(A_1ADB\right)+V\left(DA_1C_1D_1\right)+V\left(DA_1C_1B\right)$. Откуда $V\left(DA_1C_1B\right)=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$. Подсчитаем объём пирамиды $DA_1C_1B$ другим способом. $V\left(DA_1C_1B\right)=\frac{1}{3}\cdot S\left(A_1C_1B\right)\cdot h_2$ ,где $h_2$ - высота пирамиды $DA_1C_1B$, опущенная из вершины $D$, $h_2\perp\left(A_1C_1B\right)$. Имеем: $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot h_2=\frac{1}{3}$ и $h_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Диагональ единичного куба $DB_1$ равна $\sqrt{3}$. Но $h_1 + h_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. Получилось, что $DB_1$ равно сумме высот пирамид с общим основанием $A_1C_1B$ и вершинами $D$ и $B_1$, т.е. эти высоты содержатся в отрезке $D_1B$ и, следовательно, $(D_1B) \perp (A_1C_1B)$.

В этом способе мы не рассматривали, куда будут опущены высоты тетраэдров $B_1BA_1C_1$ и $DA_1C_1B$, кроме того, мы не только «прокрутили» свойства объёмов (аксиомы), но и применили такой популярный метод, как подсчет двумя способами, который привел нас к условию принадлежности точки отрезку.

Известно, что олимпиадная задача отличается от обычной тем, что необходимо что-то придумать необычное, сделать нестандартный ход, обладая при этом дополнительными сведениями. Рассмотрим «почти олимпиадный» способ решения задачи.

**Способ 7 . (Повороты в пространстве)**

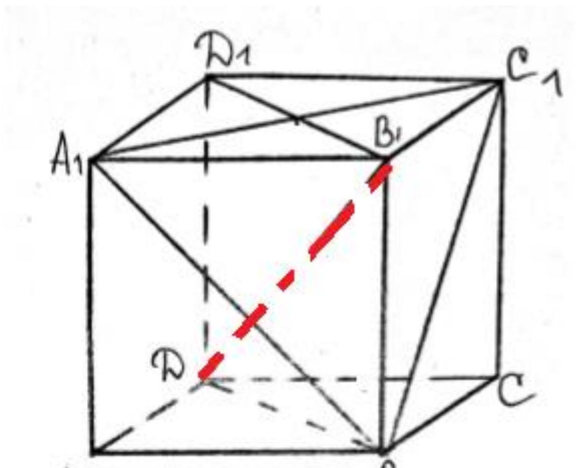


**рис.7**

Рассмотрим поворот куба относительно оси вращения $B_1D$ на $120^0$, при котором куб перейдет сам в себя, а значит и плоскость $A_1BC_1$ тоже перейдет сама в себя, т.к. вершина $B$ перейдет в вершину $C_1$, $A_1$ перейдет в $B$, а $C_1$ в $A_1$. Тогда в силу того, что треугольник $A_1BC_1$ перешел сам в себя при повороте на угол $120^0$ вокруг $B_1D$, следует, что $(D_1B) \perp (A_1C_1B)$.

Преимущество данной задачи заключается не только в том, что различные способы её решения возникают на определённых этапах изучения материала курса стереометрии в старшей школе,  она как бы проходит «сквозь» весь материал. Эта задача является примером хорошего обобщения курса на последних уроках геометрии в 11-м классе, когда до выпускных экзаменов остаются считанные дни. Это образец методов и идей в геометрии. Конечно, назвать её панацей в этом смысле было бы затруднительно, но серия таких «сквозных» задач, несомненно, укрепит веру в то, что математика – это изучение и коллекционирование методов.