I Вариант

① $$\frac{\left(1\frac{2}{9}:7\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 0{,}23}{2\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{11}{9}:\frac{22}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 0{,}23}{2\frac{5}{8}}=\frac{\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{3}{22}-\frac{1}{6}\right)\cdot 0{,}23}{2\frac{5}{8}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)\cdot 0{,}23}{2\frac{5}{8}}=0.$$

② n – натур. числа. $\frac{3n-1}{n+1}$ – целое число

$\frac{3n-1}{n+1}=\frac{3n+3-4}{n+1}=3-\frac{4}{n+1}$ – целое тогда и только тогда, когда $\frac{4}{n+1}$ – целое, т.е. $(n+1)$ – целые делители 4, но n – натур. по условию, значит, $(n+1)$ – натур. делитель 4.

Т.о. $\left[\begin{array}{l} n+1=1 \\ n+1=2 \\ n+1=4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n=0 \text{ – не удовл. условию} \\ n=1 \\ n=3 \end{array}\right.$ Проверка

Ответ: при $n=1$ или $n=3$ число $\frac{3n-1}{n+1}$ является целым.

③ m рублей – первоначальная стоимость

$m+0{,}1m$ – стоимость после подорожания на 10%

$1{,}1m+0{,}15\cdot 1{,}1m$ – стоимость после следующего подорожания на 15%

Тогда $1{,}1m+0{,}165m=1{,}265m$

Итак, товар подорожал на 26,5% от первоначальной стоимости.

④ Упростить: $\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}-2}+\dfrac{3\cdot(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+2}=$

$$=\frac{\cancel{(\sqrt{a}-1)}(a+\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+2)\cdot\cancel{(\sqrt{a}-1)}}+\frac{3(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+2}=\frac{a+\sqrt{a}+1+3\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}+2}=$$

$$=\frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}=\frac{(\sqrt{a}+2)^2}{\sqrt{a}+2}=\underline{\underline{\sqrt{a}+2,\ a\neq 1.}}$$

⑤ $2a^3+3a^2-5=2a^3-2a^2+5a^2-5=$

$$=2a^2(a-1)+5(a^2-1)=$$

$$=(a-1)(2a^2+5(a+1))=$$

$$=(a-1)\underline{\underline{(2a^2+5a+5)}}$$ не раскладывается

⑥ $\sqrt{83-18\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{81-2\cdot 9\sqrt{2}+2}-\sqrt{2}=$

$$=\sqrt{(9-\sqrt{2})^2}-\sqrt{2}=|9-\sqrt{2}|-\sqrt{2}=$$

$$=9-\sqrt{2}-\sqrt{2}=\underline{\underline{9-2\sqrt{2}}}$$

⑦ В целых числах $(x-2)(y+3)=2$

$x;y\in\mathbb{Z}$ Тогда $(x-2)$ и $(y+3)$ – целые.

Т.о. $(x-2)$ и $(y+3)$ – целые делители 2.

1) $\begin{cases}x-2=1\\y+3=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-2=-1\\y+3=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-2=2\\y+3=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

4) $\begin{cases}x-2=-2\\y+3=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=-4\end{cases}$

Ответ: $\{(3;-1);(1;-5);(4;-2);(0;-4)\}$

⑧ $|x| - x + 2 = |2x-2|$

1) $\underline{x \le 0}$

$-x - x + 2 = 2 - 2x$

$2 = 2$ (и)

$\underline{x \le 0}$

2) $\underline{0 \le x < 1}$

$x - x + 2 = 2 - 2x$

$2x = 0$

$\underline{x = 0}$

3) $\underline{x \ge 1}$

$x - x + 2 = 2x - 2$

$4 = 2x$

$\underline{x = 2}$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{2\}$.

⑨ $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 13 = 0$

$(x-1)^4 - (x^2 - 2x + 1) - 12 = 0$

$(x-1)^4 - (x-1)^2 - 12 = 0$

Пусть $(x-1)^2 = t$. $t^2 - t - 12 = 0$ $\left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 4 \end{array}\right.$

$(x-1)^2 = 4$ $\left[\begin{array}{l} x - 1 = -2 \\ x - 1 = 2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; 3\}$

⑩ $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{|2x-2| - x}$

$3x^2 - 8x + 4 = 3(x-2)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

(1) $\underline{x < 1}$

$y = \dfrac{(x-2)(3x-2)}{2 - 2x - x}$;

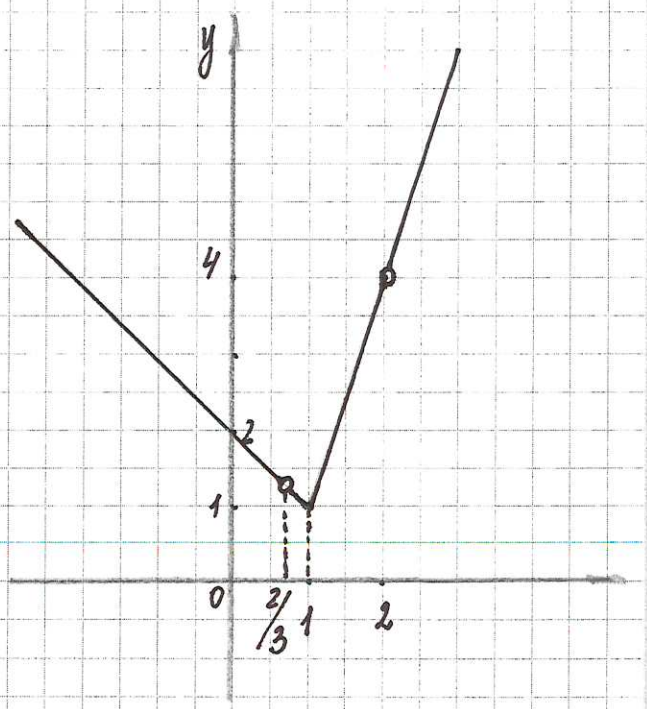
$y = -(x-2)$, $x \ne \frac{2}{3}$

$y = -x + 2$, $x \ne \frac{2}{3}$

(2) $\underline{x \ge 1}$ $y = \dfrac{(x-2)(3x-2)}{2x - 2 - x}$

$y = 3x - 2$, $x \ne 2$

x	1	2
y	1	4



11 $(k-2)x^2+2(k-1)x+k=0$ (*)

1) $\underline{k-2=0}$ $k=2$

Получаем $2x+2=0$ $x=-1$

$k=2$ – удовл. условию

2) $\underline{k\neq 2}$ уравнение (*) является квадратным. Кв. ур-ние имеет ед. корень тогда и только тогда, когда $D=0$.

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-2)\cdot k=k^2-2k+1-k^2=1$

Т.о. при $k\neq 2$ (*) имеет два различных корня

Ответ: при $k=2$ данное уравнение имеет единств. корень

12 Р.с. $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ xy+y^2=15 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2=25 \\ y^2-x^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=-5 \\ x+y=5 \end{array}\right. \\ (y-x)(y+x)=5 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x+y=-5 \\ y-x=-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=5 \\ y-x=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2y=-6 \\ x=y+1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=6 \\ x=y-1 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-3 \\ x=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$

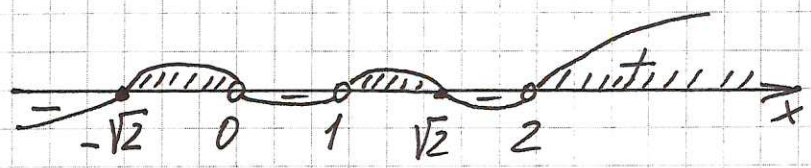
Ответ: $\{(-2;-3);(2;3)\}$

(13) Р.Н. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\geq\frac{1}{x}$

$$\frac{x^2-x+x^2-2x}{(x-2)(x-1)x}\geq\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x-1)}$$

$$\frac{2x^2-\cancel{3x}-x^2+\cancel{3x}-2}{x(x-1)(x-2)}\geq 0$$

$$\frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)}\geq 0$$



$-\sqrt{2}\leq x<0 \qquad 1<x\leq\sqrt{2} \qquad x>2$

Ответ: $[-\sqrt{2};0)\cup(1;\sqrt{2}]\cup(2;\infty)$

(14) Примем работу всю за 1.

t (мин) – время, за которое всю работу выполнит 1-я машина

$t+15$ (мин) – время, за которое всю работу выполнит вторая машина

10 (мин) – время, за которое выполнят работу вместе две машины

Получаем уравнение:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+15}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{t+15+t}{t(t+15)}=\frac{t^2+15t}{10t(t+15)}$$

$$20t+150=t^2+15t$$

$$t^2-5t-150=0 \quad \left[\begin{array}{l} t=-10 \text{ – не удовл} \\ t=15 \end{array}\right.$$

Итак, 15 минут – время первой машины;
30 минут – время второй машины.

(15) S (км) — расстояние от города до посёлка

2,5 (часа) — время, за которое автомобиль проезжает S с первоначальной скоростью

$\frac{S}{2,5}$ (км/ч) — первоначальная скорость

$\frac{S}{2,5}+20$ (км/ч) — увеличенная скорость

$S+15$ (км) — расстояние с увелич. скоростью, которое он проедет за 2 часа

Получаем уравнение:

$$\left(\frac{S}{2,5}+20\right)\cdot 2 = S+15$$

$$\frac{4S}{5}+40 = S+15 \qquad \frac{1}{5}S = 25$$

$$S = 125$$

Ответ: расстояние от города до посёлка равно 125 км

(16) $A(1;2)$ $y(0)=2$ или $y(0)=-2$

$y = kx+b$ Найти k и b.

(1) $A(1;2)$, $y(0)=2$ Тогда $y=2$

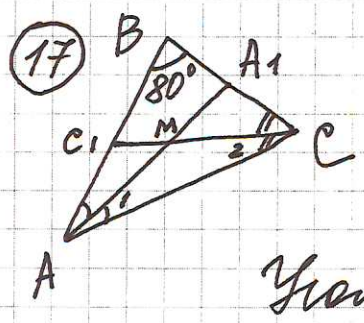
(2) $A(1;2)$ $y(0)=-2$

$$\begin{cases} 2 = k+b \\ -2 = 0+b \end{cases} \qquad \begin{cases} k=4 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$y = 4x-2$$

Ответ: уравнение прямых $y=2$ или $y=4x-2$

(17)



$\angle A + C = 100°$

$\angle 1 + \angle 2 = 50°$

$\angle AMC = 180° - 50° = 130°$

Угол м/у биссектрисами – меньший, т.е. смежный с $\angle AMC$, равен $50°$.

(18) $ABCD$ – ромб

$S_{ABCD} = 27$ см^2

d_1 и d_2 – диагонали,

$d_2 = 1{,}5 \cdot d_1$

Найти диагонали

$$S_{ромба} = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Тогда получаем уравнение:

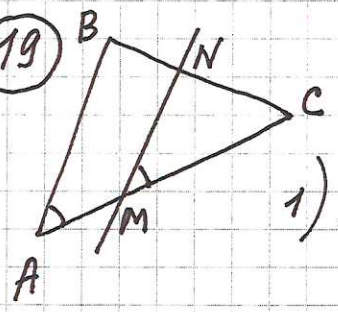
$$\frac{1{,}5 d_1^2}{2} = 27$$

$$d_1^2 \cdot \frac{3}{4} = 27 \quad d_1^2 = 9 \cdot 4 \quad d_1 = 6$$

$$d_2 = 6 \cdot 1{,}5 = 9$$

Ответ: диагонали ромба 6см и 9см.

(19)



M: $AM : MC = 2 : 3$

$(MN) \parallel (AB)$

$$\frac{S_{\Delta MCN}}{S_{AMNB}} = ?$$

1) $\Delta MNC \sim \Delta ABC$ по признаку (по 2 углам)

$$\frac{MC}{AC} = K = \frac{3}{5}$$

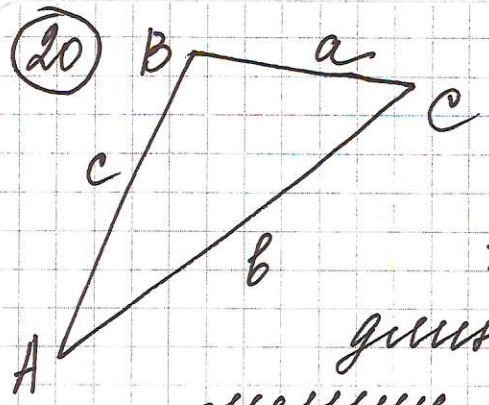
2) $\dfrac{S_{\Delta MNC}}{S_{\Delta ABC}} = K^2 = \dfrac{9}{25}$. Тогда $S_{\Delta MNC} = \dfrac{9}{25} S_{\Delta ABC}$

$S_{AMNB} = \dfrac{16}{25} S_{\Delta ABC}$

3) $$\frac{S_{AMNC}}{S_{AMNB}} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{16}{25}} = \frac{9}{16}$$

Ответ: $\dfrac{9}{16}$.

(20)



Пусть $a=2$ $b=4$

Треугольник существует тогда и только тогда, когда длина каждой из его сторон меньше суммы двух других его сторон, но больше или равна модуля их разности

Т.о. $|b-a| \le c < a+b$

$2 \le c < 6$

Проверим $c=2$

$a+c=4$ и $b=4$

След-но, $c=2$ - невозможно

Итак, возможные длины третьей стороны 3; 4 или 5.

II Вариант

① $$\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{24}\right)\cdot 8-\frac{1}{3}}{1{,}85-1{,}62:0{,}9}=\frac{\left(\frac{6}{24}-\frac{5}{24}\right)\cdot 8-\frac{1}{3}}{1{,}85-1{,}8}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{0{,}05}=0.$$

② n – натур. числа. $\frac{3n+1}{n-1}$ – целое число

$\frac{3n+1}{n-1}=\frac{3n-3+4}{n-1}=3+\frac{4}{n-1}$ – целое тогда и только тогда, когда $\frac{4}{n-1}$ – целое, т.е. $(n-1)$ – целые делители 4, но n – натур. по условию, значит, $(n-1)$ – натур. делитель 4.

$$\left[\begin{array}{l} n-1=1 \\ n-1=2 \\ n-1=4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=3 \\ n=5 \end{array}\right.$$

Проверка

Ответ: при $n=2$, $n=3$, $n=5$.

③ m – рублей – первоначальная стоимость

$m+0{,}15m$ – стоимость после подорожания на 15%

$1{,}15m+0{,}1\cdot 1{,}15m$ – стоимость после следующего подорожания на 10%

Тогда $1{,}15m+0{,}115m=1{,}265m$

Итак, товар подорожал на 26,5% от первоначальной стоимости.

④ $$\frac{a\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{a}-2}-\frac{3(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-2}=\frac{\cancel{(\sqrt{a}+1)}(a-\sqrt{a}+1)}{\cancel{(\sqrt{a}+1)}(\sqrt{a}-2)}-\frac{3(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-2}=$$

$$=\frac{a-\sqrt{a}+1-3\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2}=\frac{a-4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2}=\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}-2}=\underline{\underline{\sqrt{a}-2,\ a\neq 4}}$$

⑤ $2a^3+3a-5=2a^3-2a+5a-5=$

$=2a(a^2-1)+5(a-1)=(a-1)(2a(a+1)+5)=$

$=(a-1)(2a^2+2a+5)$ не раскладывается

⑥ $\sqrt{54-14\sqrt{5}}+\sqrt{5}=\sqrt{49-2\cdot 7\sqrt{5}+5}=$

$=\sqrt{(7-\sqrt{5})^2}+\sqrt{5}=7-\sqrt{5}+\sqrt{5}=7.$

⑦ $(x+2)(y-3)=2 \qquad x;y\in\mathbb{Z}$

Тогда $(x+2)$ и $(y-3)$ – целые числа.

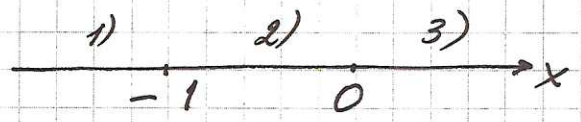
Т.о. $(x+2)$ и $(y-3)$ – целые делители 2.

1) $\begin{cases}x+2=1\\y-3=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2=-1\\y-3=-2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2=2\\y-3=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2=-2\\y-3=-1\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$

Ответ: $\{(-3;1);(-1;5);(0;4);(-4;2)\}$

⑧ Р.у. $|x|+x+2=|2x+2|$



1) $x<-1$

$-x+x+2=-2x-2$

$2x=-4$

$x=-2$

2) $-1\le x<0$

$-x+x+2=2x+2$

$2x=0$

$x=0$ не уд.

3) $x\ge 0$

$2x+2=2x+2$

$0=0$ (нет)

$x\ge 0$

Ответ: $\{-2\}\cup[0;\infty)$

⑨ $(x+1)^4-x^2-2x-13=0$

$(x+1)^4-(x+1)^2-12=0$

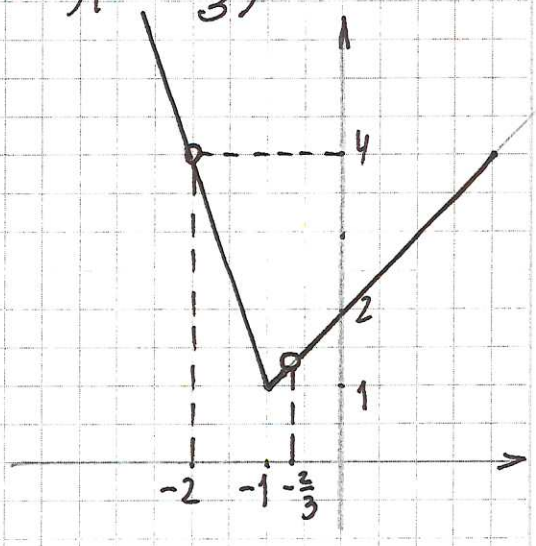
$\left[\begin{array}{l}(x+1)^2=-3\\(x+1)^2=4\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x+1=-2\\x+1=2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

Ответ: $\{-3;1\}$

(10) $y=\dfrac{3x^2+8x+4}{|2x+2|+x}$

$3x^2+8x+4=$
$=3(x+2)(x+\frac{2}{3})$



(1) $\underline{x<-1}$

$y=\dfrac{(x+2)(3x+2)}{-2-x}$

$y=-3x-2,\ x\neq-2$

x	-1	-2
y	1	4

для прямой $y=-3x-2$

(2) $\underline{x\geq-1}$ $y=\dfrac{(x+2)(3x+2)}{3x+2}$

$y=x+2,\ x\neq-\frac{2}{3}$

(11) $(k+2)x^2+2(k+1)x+k=0$ (*)

(1) $\underline{k+2=0}$ $k=-2$

Получаем $-2x-2=0$ $x=-1$

$k=-2$ – удовл. условию

(2) $\underline{k\neq-2}$ Ур-ние (*) является квадратным. Кв. ур-ние имеет ед. корень тогда и только тогда, когда $D=0$

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-k(k+2)=1$, т.е. при $k\neq2$ ур-ние (*) имеет два различных корня

Ответ: при $k=-2$ ур. имеет ед. корень

(12) Р.с. $\begin{cases}y^2-xy=4\\x^2-xy=-3\end{cases}$ $\begin{cases}y^2-x^2=7\\(y-x)^2=1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y-x=-1\\y-x=1\end{array}\right.\\(y-x)(y+x)=7\end{cases}$

$\begin{cases}y-x=-1\\y+x=-7\end{cases}$ | $\begin{cases}y-x=1\\y+x=7\end{cases}$

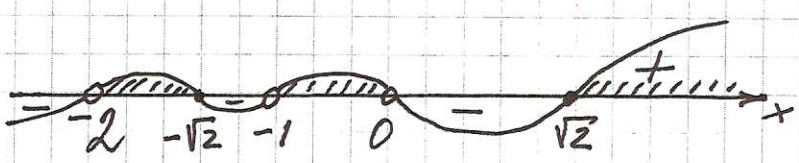
$\begin{cases}2y=-8\\x=y+1\end{cases}$ $\begin{cases}y=-4\\x=-3\end{cases}$ | $\begin{cases}2y=8\\x=y-1\end{cases}$ $\begin{cases}y=4\\x=3\end{cases}$

Ответ: $\{(-3;-4);(3;4)\}$

13 Р.Н. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{x}$

$$\frac{x^2+x+x^2+2x}{x(x+1)(x+2)}\geq\frac{x^2+3x+2}{x(x+2)(x+1)}$$

$$\frac{x^2-2}{x(x+1)(x+2)}\geq 0$$



$-2<x\leq-\sqrt{2}$ $\quad -1<x<0$ $\quad x\geq\sqrt{2}$

Ответ: $(-2;-\sqrt{2}]\cup(-1;0)\cup[\sqrt{2};\infty)$

14 Примем весь объём работы за 1.

t (мин) – время, за которое всю работу выполнит 1-я машина

$t+30$ (мин) – время, за которое всю работу выполнит 2-я машина

20 (мин) – время совместной работы

Получаем уравнение: $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+30}=\frac{1}{20}$

$$(2t+30)\cdot 20=t^2+30t$$

$$t^2-10t-600=0 \qquad \left[\begin{array}{l} t=-20 \\ t=30 \end{array}\right.$$

Итак, время работы первой машины – 30 мин, время работы второй – 60 минут

15 v (км/ч) – скорость автобуса

$v+20$ (км/ч) – скорость автомашины

6 (ч) – время движения автобуса

5 (ч) – время движения автомашины

70 (км) – разница в расстоянии

Получаем ур-ние: $v\cdot 6+70=(v+20)\cdot 5$

$$6v-5v=100-70$$

$$v=30$$

Ответ: скорость автобуса 30 км/час

(16) $A(-1;2)$ $y(0)=2$ или $y(0)=-2$.

$y=kx+b$ Найти k и b.

(1) $A(-1;2)$
$y(0)=2$ Тогда $y=2$

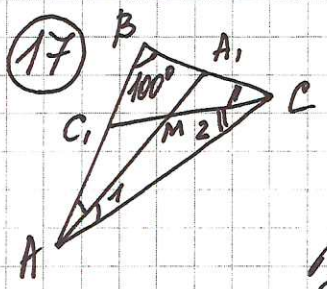
(2) $A(-1;2)$ $y(0)=-2$

$$\begin{cases} 2=-k+b \\ -2=k\cdot 0+b \end{cases} \quad \begin{cases} k=-4 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$y=-4x-2$$

Ответ: уравнения прямых $y=2$ или $y=-4x-2$.

(17)



$\angle A+\angle C=80^\circ$

$\angle 1+\angle 2=40^\circ$

$\angle AMC=140^\circ$

Угол м/у биссектрисами – меньший, т.е. смежный с $\angle AMC$, равен 40°

(18) $ABCD$ – ромб

$S_{ABCD}=20$ см^2

d_1 и d_2 – диагонали

$d_2=2{,}5\,d_1$

Найти диагонали

$S_{ромба}=\frac{d_1 d_2}{2}$

Тогда получаем ур-ние:

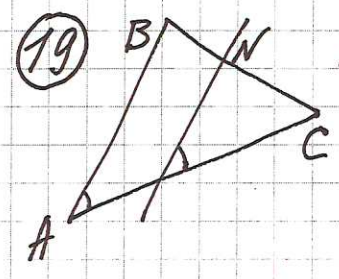
$$\frac{2{,}5\,d_1^2}{2}=20$$

$$\frac{5}{4}d_1^2=20 \quad d_1^2=16$$

$$d_1=4 \quad d_2=10$$

Ответ: диагонали ромба 4см и 10см.

(19)



M: $AM:MC=3:2$

$(MN)\parallel(AB)$

$\frac{S_{\Delta MCN}}{S_{AMNB}}=?$

1) $\Delta MCN \sim \Delta ACB$

$\frac{MC}{AC}=k=\frac{2}{5}$

2) $\frac{S_{\Delta MCN}}{S_{\Delta ABC}}=k^2=\frac{4}{25}$

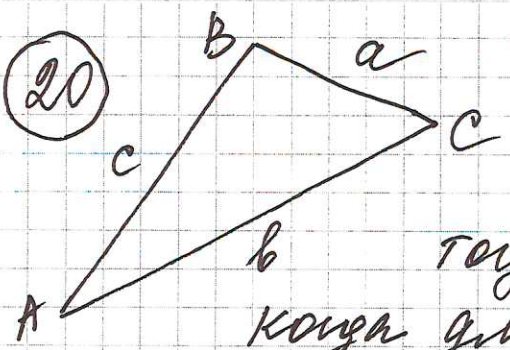
Тогда $S_{\Delta MCN}=\frac{4}{25}S_{\Delta ABC}$

$S_{AMNB}=\frac{21}{25}S_{\Delta ABC}$

3) След-но, $\frac{S_{\Delta MCN}}{S_{AMNB}}=\frac{4}{21}$.

Ответ: $\frac{4}{21}$

20



Пусть $a=2$ $b=5$

Треугольник существует тогда и только тогда, когда длина каждой из его сторон меньше суммы двух других его сторон, но больше или равна модуля их разности.

Т.о. $|b-a| \leq c < a+b$

$3 \leq c < 7$

Проверим $c=3$

$a+c=5$ и $b=5$

След-но, $c=3$ - невозможно

Итак, возможные длины третьей стороны 4; 5; 6