

Вступительная работа по математике в 10 (интернат) класс 16 мая 2024 года

1. Вычислите $\frac{2ab(a^3 - b^3)}{a^2 + ab + b^2} - \frac{(a-b)(a^4 - b^4)}{a^2 - b^2}$ где $a = -1, \underbrace{5\dots56}_{2024}, b = 5, \underbrace{4\dots44}_{2024}$

2. Определите число вещественных (действительных) корней уравнения

$$(x^2 + x - 2) \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2} - 2(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^2 + x - 4 \right) = 0$$

3. Решите неравенство $\frac{3x^2 + 6x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{2x + 3}{x - 1} \geq \frac{5x + 1}{x}$

4. Решите систему
$$\begin{cases} x^2 + 3y + z = -8 \\ x + y^2 + 5z = -12 \\ x + y + z^2 = 6 \end{cases}$$

5. Прямая проходит через точку с координатами (10;0) и пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 . Найдите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

6. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка $[0;1]$, а другой – вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$

7. Постройте график функции $y = \frac{2x^2 - 8x}{|x - 2| - 2}$ и укажите множество тех значений функции, которые она принимает ровно один раз.

8. В коробке лежит 30 белых и черных шаров. Определите, сколько белых и сколько черных шаров в коробке, если среди любых 12 шаров хотя бы 1 белый, а среди любых 20 шаров хотя бы 1 черный.

9. Найдите целое число a , при котором выражение $(x - a)(x - 10) + 1$ раскладывается в произведение $(x + b)(x + c)$ с целыми b и c .

10. Известно, что $f(2x) = \frac{x + 1}{2x + 3}$. Найдите корни уравнения $f(x) - 1 = 0$.

11. При каком значении a выражение $x^2 + \frac{a^2}{x^2} - 4\left(x + \frac{a}{x}\right) + 10$ является полным квадратом?

12. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $\frac{3x}{x^2 + 5x + 9} = a$ равно 9?

13. Для любой пары чисел определена некоторая операция «*», удовлетворяющая следующим свойствам: $a * (b * c) = (a * b) \cdot c$ и $a * a = 1$, где операция « \cdot »- операция умножения. Найдите все корни x уравнения $x * 3 = 2024$. (Существование такой операции считать известным, доказывать его не надо)

14. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна $2\sqrt{2}$, а длина основания BC равна $\sqrt{2}$. Угол $A = 15^\circ$, угол $D = 30^\circ$. Найдите длину боковой стороны AB .

15. Высоты AK и CL остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите тангенс угла BAC , если $AH = HK$ и $CH = 2HL$

16. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) из точки E – середины CD провели перпендикуляр EF к прямой AB . Найдите площадь трапеции, если $AB = 5, EF = 4$

17. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 10 см. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно. Найдите $AX \cdot AB + CY \cdot BC$