

# ПРЕЗИДЕНТСКИЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ №239

Вступительная работа по математике для поступающих в 10 класс с проживанием в интернате

12 мая 2022 года

1. Вычислите:  $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{38 - 12\sqrt{10}} + 18}$ .
2. Найдите сумму целых решений неравенства  $(x - 1)x(x + 1)(x + 2) \leq 8$ .
3. Про функцию  $f$  известно, что для любого  $x$  выполнено соотношение  $f(2x + 1) = 4x^2 + 1$ . Найдите наибольшее значение  $f(x)$  при  $x \in [0; 2]$ .
4. Чему должно равняться произведение  $ab$ , чтобы расстояние между точками  $a$  и  $b$  числовой оси, для которых  $a + b = \sqrt{2022}$ , было равно 41?
5. В предвыборном штабе депутата листовки печатают 4 станка разной мощности. При печатании листовок на 1-м, 2-м и 4-м станках весь тираж будет готов за 1 час 48 мин; при печатании 1-м, 2-м и 3-м – за 2 часа 15 минут, а если листовки печатать на 3-м и 4-м станках, то тираж напечатают за 1,5 часа. За какое время будет готов весь тираж при совместной работе всех четырех станков?
6. На рисунке параболы  $f$  с уравнением  $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$  и  $g$  с уравнением  $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$  касаются друг друга в точке, лежащей на оси ординат. Найдите соотношение между коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ ;  $b_1$  и  $b_2$ ;  $c_1$  и  $c_2$ .

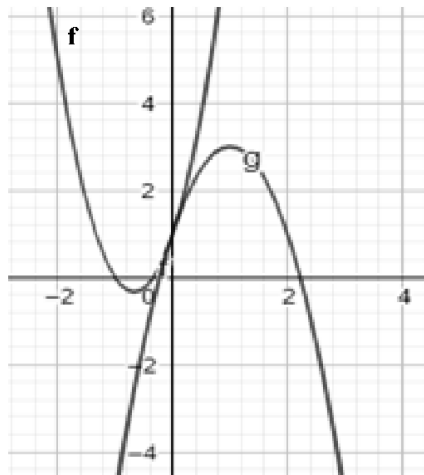


Рис. 1: Касающиеся параболы к задаче 6

7. Решите уравнение  $x^2 + x^{10} = 2x^{12}$ .
8. Из всех решений уравнения  $y^2x - y^2 + 4xy + 6x - 2y = 3$  (а его решениями являются пары чисел  $(x; y)$ , например, такая:  $(1; -1, 5)$ ) найдите те решения, для которых  $x$  принимает наименьшее значение.
9. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $BC$   $AB = 17$ ,  $BC = 16$ . Найдите а) высоту из точки  $B$ , б) радиус вписанной окружности, с) радиус описанной окружности.
10. В треугольнике  $ABC$   $AB = 8$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 10$ . Найдите длину биссектрисы  $BL$ .
11. Сторона  $AD$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$  является диаметром его описанной окружности,  $M$  — точка пересечения диагоналей,  $H$  — проекция точки  $M$  на  $AD$ . Докажите, что  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $BHC$ .
12. Точка  $K$  на медиане  $BM$  треугольника  $ABC$  такова, что  $BK : KM = 3 : 1$ . В каком отношении прямая  $CK$  делит отрезок  $AB$ ?